
目录

1 科学问题:	2
2 科学意义:	2
3 研究内容	3
【1】我们决定探究以下三个因素对自行车平衡的影响, 并且分别考虑有无人在车上的情形:	4
【2】该模型的原理简介:	4
(1) 该模型做出以下假设:	4
(2) 为确保车轮做纯滚动运动, 用三个约束来限制车轮在三个方向的滑移:	5
(3) 在虚拟样机中建立无滑滚动模型的方式:	6
【3】如何设置参数:	7
【4】如何制造扰动:	7
【5】如何衡量平衡程度:	8
4 研究结果	8
【1】 初速度 (v_f) 对自平衡的影响:	8
(1) 后车架质量 85kg, 干扰力 500N。	8
(2) 后车架质量 10kg, 干扰力 60N。	11
【2】 前插倾角 (θ) 对自平衡的影响:	16
(1) 后车架质量 85kg, 干扰力 500N, 初速度 4.6m/s	16
(2) 后车架质量 10kg, 干扰力 60N, 初速度 14m/s	24

【3】重心位置（）对自平衡的影响：	37
5 任务分配、个人的贡献	42
6 参考文献.....	42

1 科学问题：

影响自行车自平衡的因素是什么？

自十九世纪八十年代用链条传动的安全自行车面世以来，现代自行车并没有从根本上发生改变。

在一个多世纪后的今天，科学家们仍在试图找出使自行车保持平衡的关键所在。这里，我们重点探究在没有人操作情况下影响自行车稳定运动的一些因素。

为了简化模型并且便于操作，我们将通过 COMSOL 软件对自行车运动进行虚拟样机模拟，并且对使用的模型做出一些合理的假设。

2 科学意义：

早期的研究大多集中注意于如何加速的问题。事实已经证明，自行车是一种最省力最优秀的非机动车交通工具。不过要讲清楚行进中的自行车为什么不倒的问题，即自行车的自平衡的稳定性的问题，可不那么简单。

这就是所谓的“自行车稳定性”的问题，即有两个轮子支起来的自行车，在行进时为什么居然非常稳当不会倾覆？

一百多年来这项研究吸引了许多著名的力学家、物理学家乃至数学家参加，累计发表的有名的论文，包括以英、德、法、俄、意大利等各种语言的论文，在百篇以上，其中还有博士、硕士和学士的毕业论文，包括著名力学家铁木辛科 (Timoshenko) 和杨(Young)【1】.在 1897 年，法国科学院还为之设立过一次悬赏 (Prix Fournayron competition) 。令人惊异的是，迄今这个问题很难说已经最后解决了。人们还在继续研究。【2】.

在 1869 年到 1970 年这一百年间发表的这许多论文，对自行车行驶的稳定性，提出了各种模型，也列出了不同类型的微分方程组。

长久以来，人们一致认为自行车保持稳定的因素有两个：前轮的陀螺进动和前轮尾迹，这是前转向轴与地面接触在前轮触地点前方时产生的。最近，代尔夫特和康奈尔大学的一组研究人员发表了一篇综合性评论，他们使用自己的研究成果展示了自行车的自稳定性。该研究表明，这种现象并非仅仅是某个简单的原因引起的。而是多种因素的组合，包括陀螺效应和前叉倾角、自行车几何结构、速度及质量分布，都对保持无人操控自行车的直立前进发挥了作用。

我们在 COMSOL 软件的论坛博客上【3】找到了一个受此项研究启发的模型，该模型用来演示无人自行车的自稳定行驶情况。

3 研究内容

【1】我们决定探究以下三个因素对自行车平衡的影响，并且分别考虑有无人在车上的情形：

- 因素一：自行车初速度
- 因素二：前叉倾角
- 因素三：自行车重心的位置

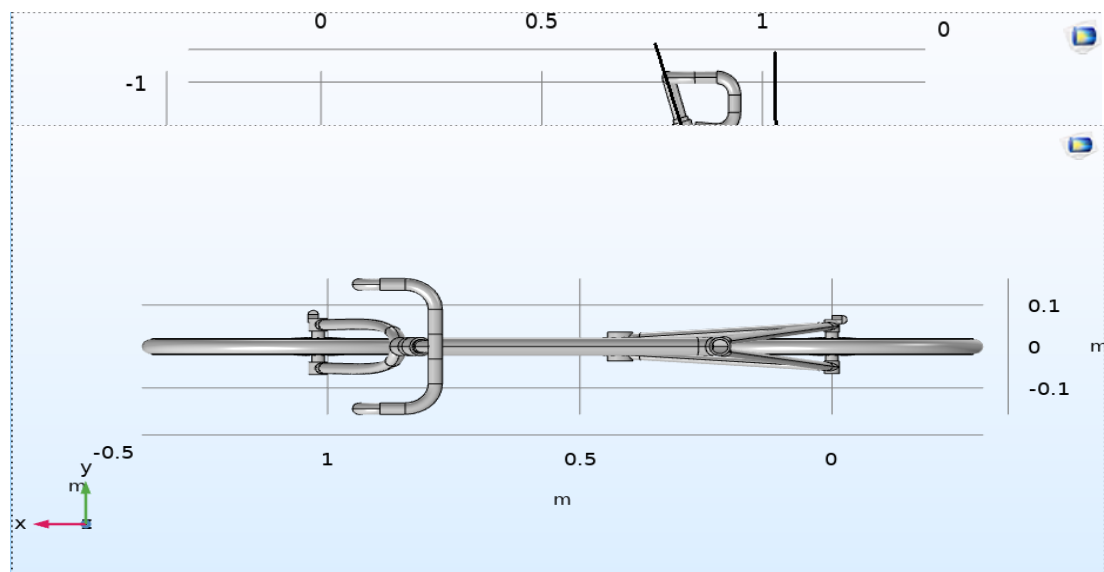
【2】该模型的原理简介：

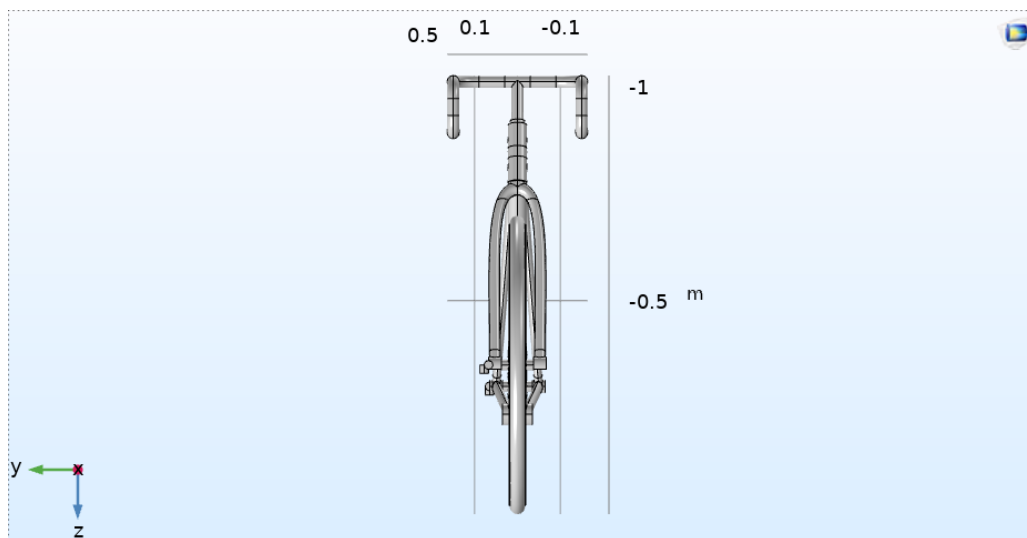
(1) 该模型做出以下假设：

- 假设所有组件均为刚性。
- 所有接头均视为无摩擦。
- 建模时，假设自行车车轮与地面只有点接触。
- 车轮做纯滚动。
- 假设自行车在平面上移动。
- 该自行车模型假设具有无后座车架，通过后车架上添加的质量来定义。

这辆自行车由四个刚性组件组成：后轮；后车架，包括无后座车架；前车架，包括车把；以及前轮。尽管车轮的厚度不为 0，但我们仍假设它与地面在一个点发生接触。后车架通过铰链关节连接到后轮。并使用另一个铰链关节来连接两个车架。此关节的轴形成了自行车的转向轴。第三个铰链关节用于连接前轮和前车架。

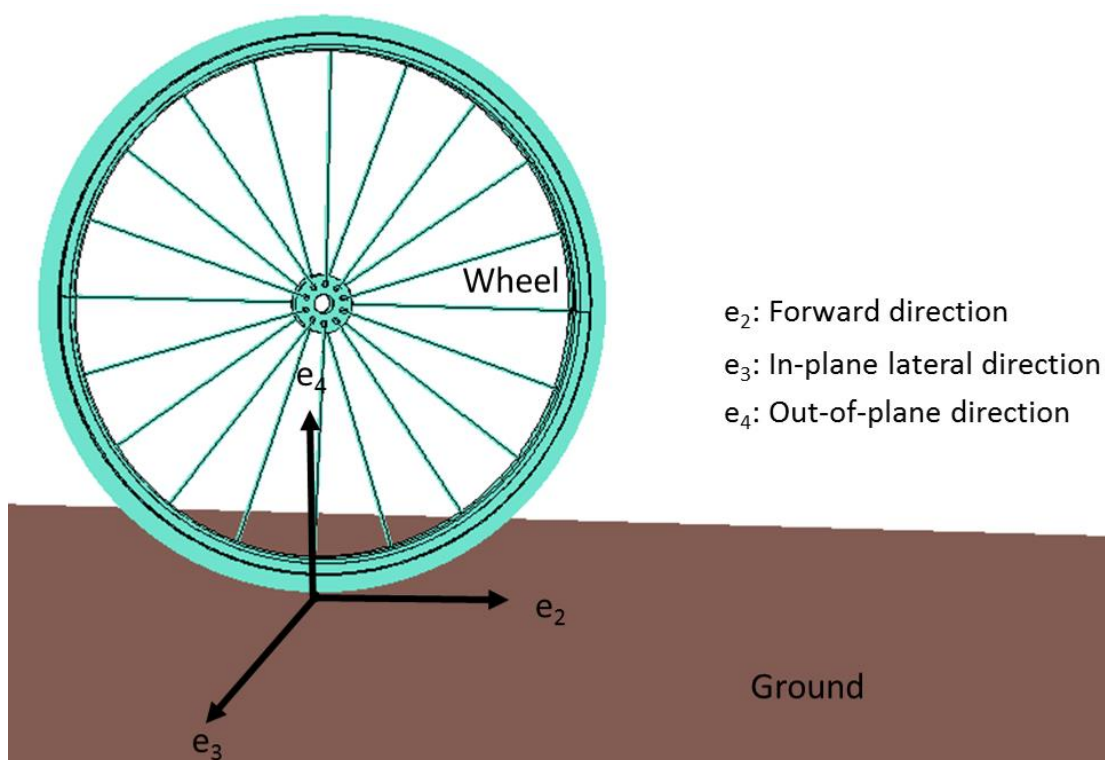
图示如下：





(2) 为确保车轮做纯滚动运动，用三个约束来限制车轮在三个方向的滑移：

这些约束如下：



前进方向无滑移：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{e}_2 = r \frac{d\theta_s}{dt}$$

面内横向无滑移：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{e}_3 = r \frac{d\theta_l}{dt}$$

面外方向无滑移：

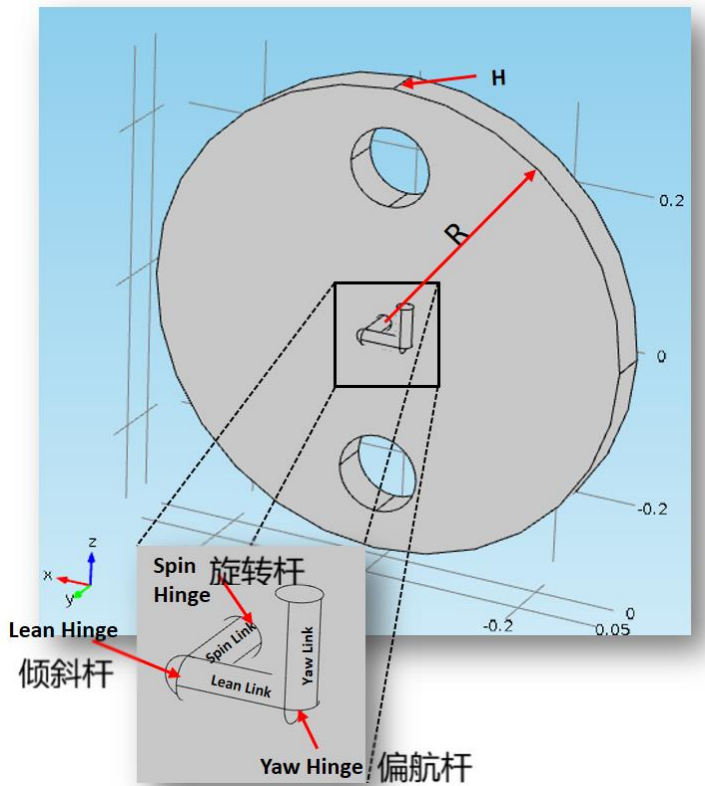
$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{e}_4 = 0$$

其中， $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{e}_4$ 分别是瞬时前进方向（倾轴）、面内横向（旋转轴）及

面外方向（ $\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ ）的单位向量； $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ 是重心的平移速度； r 是车轮半

径； $\frac{d\theta_s}{dt}$ 是旋转角速度；且 $\frac{d\theta_l}{dt}$ 是倾斜角速度。

（3）在虚拟样机中建立无滑滚动模型的方式：



通过三根与车轮相连的无质量连杆来添加约束方程。

偏航杆始终保持竖直方向（ $\mathbf{e}_1$ 方向），并与倾斜杆通过铰链连接。

倾斜杆($\mathbf{e}_2$ 方向)始终在与地面平行的平面内绕偏航杆转动，与车轮平面时刻

保持平行，他与旋转杆通过铰链连接。
 旋转杆（e3 方向）绕倾斜杆转动，并时刻与车轮平面保持垂直，它与车轮通过铰链连接。
 自行车轮绕旋转杆转动。

【3】如何设置参数：

初始参数为：

1	l _{ll}	0.02[m]	倾斜杆长	
2	l _{lr}	0.01[m]	倾斜杆半径	
3	v _f	4.6[m/s]	初始前进速度	
4	x _{HB}	0.80757	方向控制铰链中心x坐标	
5	z _{HB}	-0.9	方向控制铰链中心z坐标	
6	I _{Bxx}	9.2[kg*m ²]	后框架惯性张量xx分量	
7	I _{Bxz}	2.4[kg*m ²]	后框架惯性张量xz分量	
8	I _{Byy}	11[kg*m ²]	后框架惯性张量yy分量	
9	I _{Bzz}	2.8[kg*m ²]	后框架惯性张量zz分量	
10	m _B	85[kg]	后框架质量	
11	x _B	0.3[m]	后框架质心x坐标	
12	z _B	-0.9[m]	后框架质心z坐标	
13	r _R	0.3[m]	后轮半径	
14	I _{Rxx}	0.0603[kg*m ²]	后轮惯性张量xx分量	
15	I _{Ryy}	0.12[kg*m ²]	后轮惯性张量yy分量	
16	m _R	2[kg]	后轮质量	
17	s _{ll_r}	0.065[m]	后轮旋转杆长	
18	st	18[deg]	前叉倾角	
19	w _b	1.0188[m]	前后轮中心距	
20	I _{Hxx}	0.05892[kg*m ²]	前框架惯性张量xx分量	
21	I _{Hxz}	-0.00756[kg*m ²]	前框架惯性张量xz分量	
22	I _{Hyy}	0.06[kg*m ²]	前框架惯性张量yy分量	
23	I _{Hzz}	0.00708[kg*m ²]	前框架惯性张量zz分量	
24	m _H	4[kg]	前框架质量	
25	x _H	0.9[m]	前框架质心x坐标	
26	z _H	-0.7[m]	前框架质心z坐标	
27	r _F	0.35[m]	前轮半径	
28	I _{Fxx}	0.1405[kg*m ²]	前轮惯性张量xx分量	
29	I _{Fyy}	0.28[kg*m ²]	前轮惯性张量yy分量	
30	c	0.08[m]	前轮尾迹	
31	m _F	3[kg]	前轮质量	
32	s _{ll_f}	0.0675[m]	前轮旋转杆长	

其中，我们假设将人的质量与后框架质量合并。考虑人的质量时后框架质量为 85KG，不考虑人时则为 10KG，并将相关的惯性矩分量进行等比缩小。

【4】如何制造扰动：

考虑人质量时：在后框架质心上作用一个大小为 500N 的力，方向沿+y 方向。
 持续时间从 0s 到 0.08s.

不考虑人质量时：在后框架质心上作用一个大小为 60N 的力，方向沿+y 方向。持续时间从 0s 到 0.08s.

【5】如何衡量平衡程度：

通过模拟 0-5s 内自行车的运动，分别绘制

图一：倾斜角速率-时间、

图二：倾斜角-时间、

图三：偏航角速率-时间、

图四：偏航角-时间

的图像，对图像进行分析。

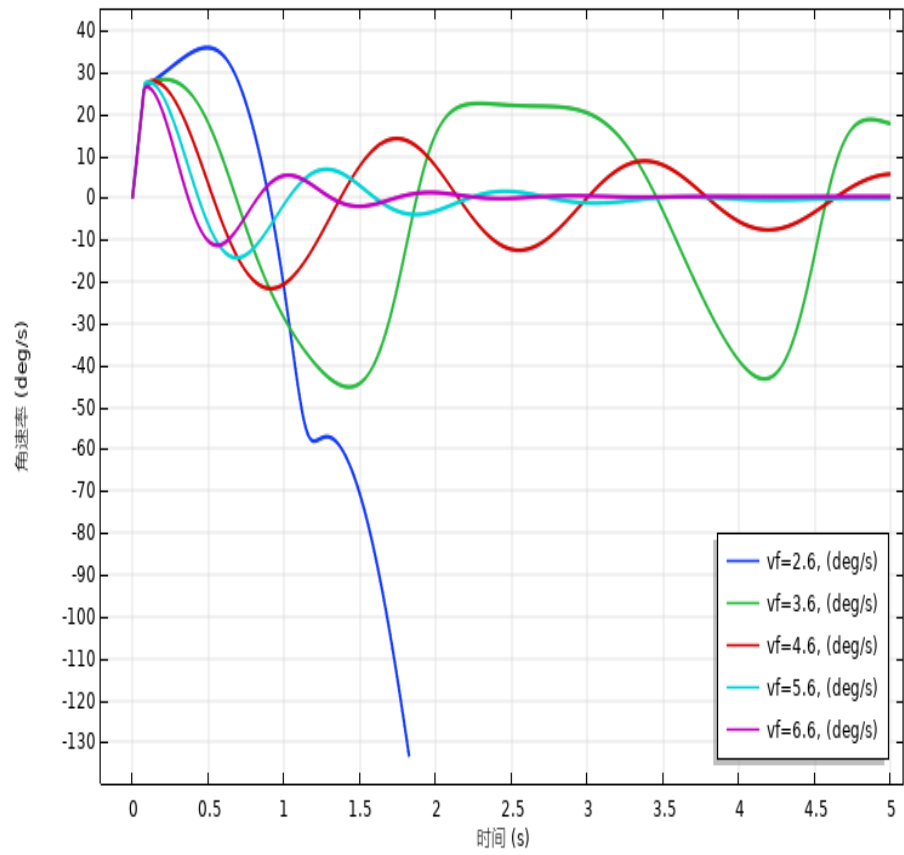
4 研究结果

【1】初速度 (v_f) 对自平衡的影响：

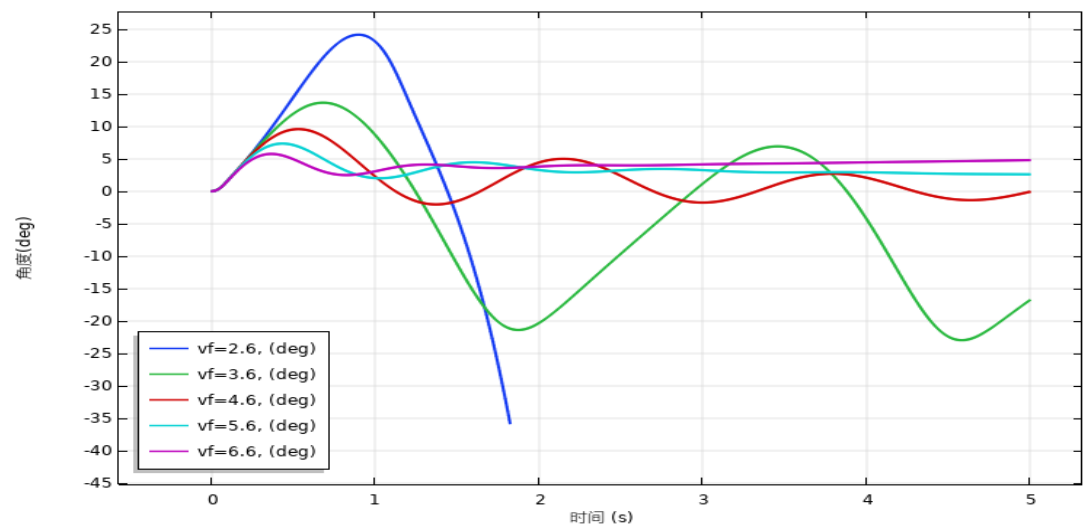
(1) 后车架质量 85kg, 干扰力 500N。

1) $v_f = 2.6 \sim 6.6 \text{ m/s}$:

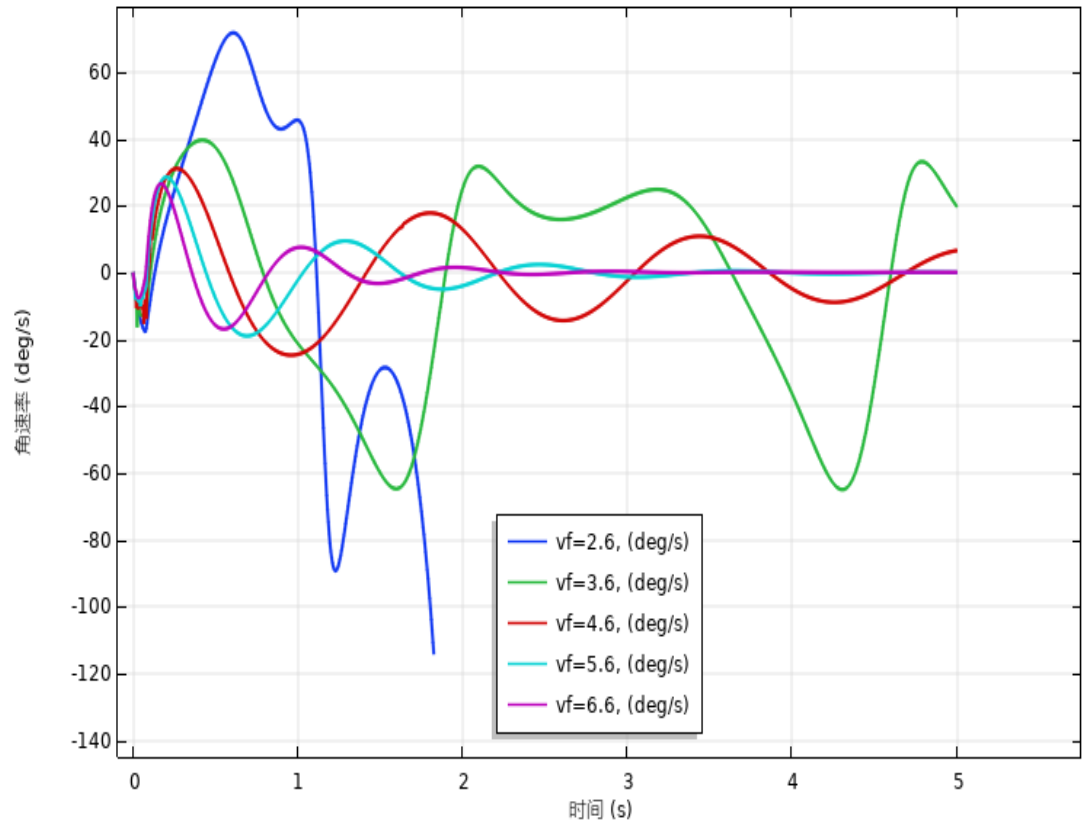
倾斜角速率



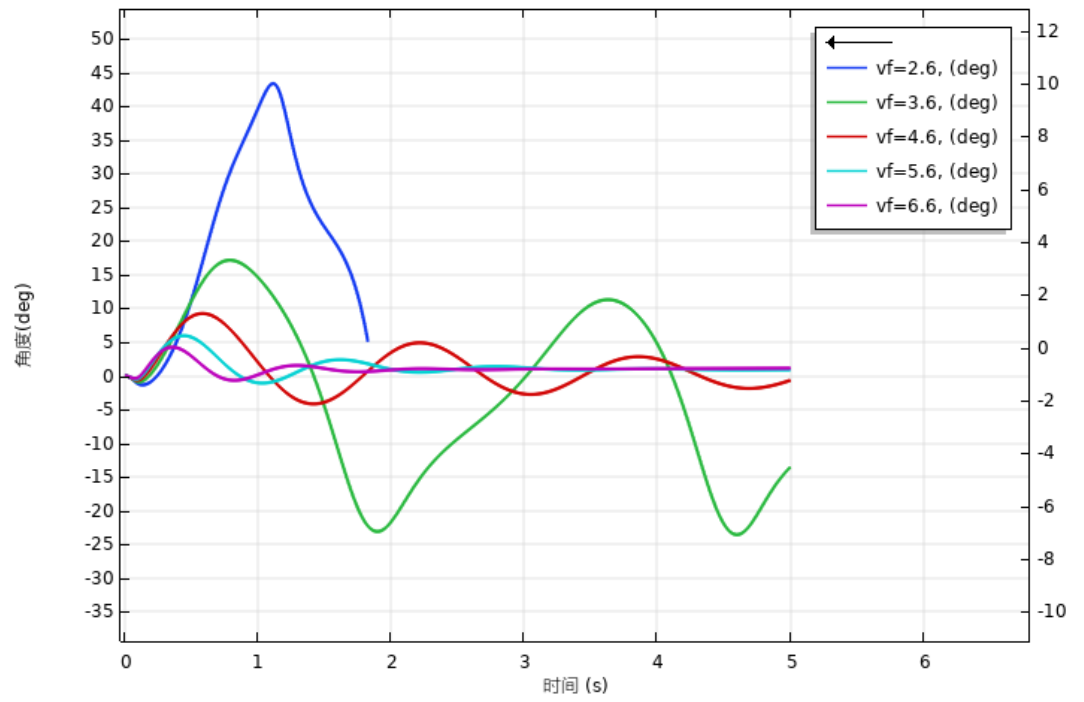
倾斜角



偏航角速率



偏航角

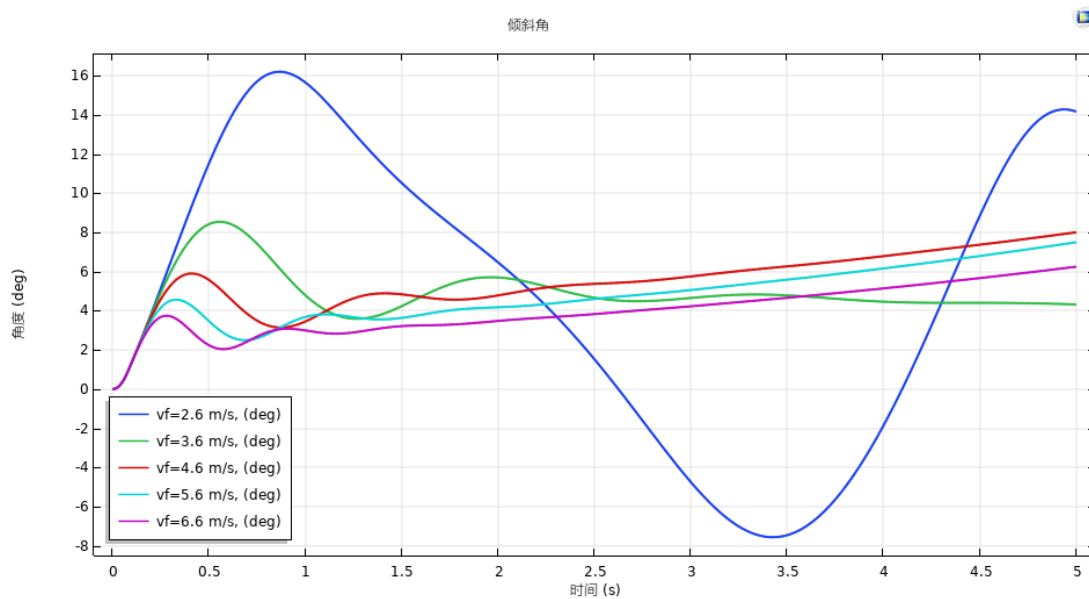


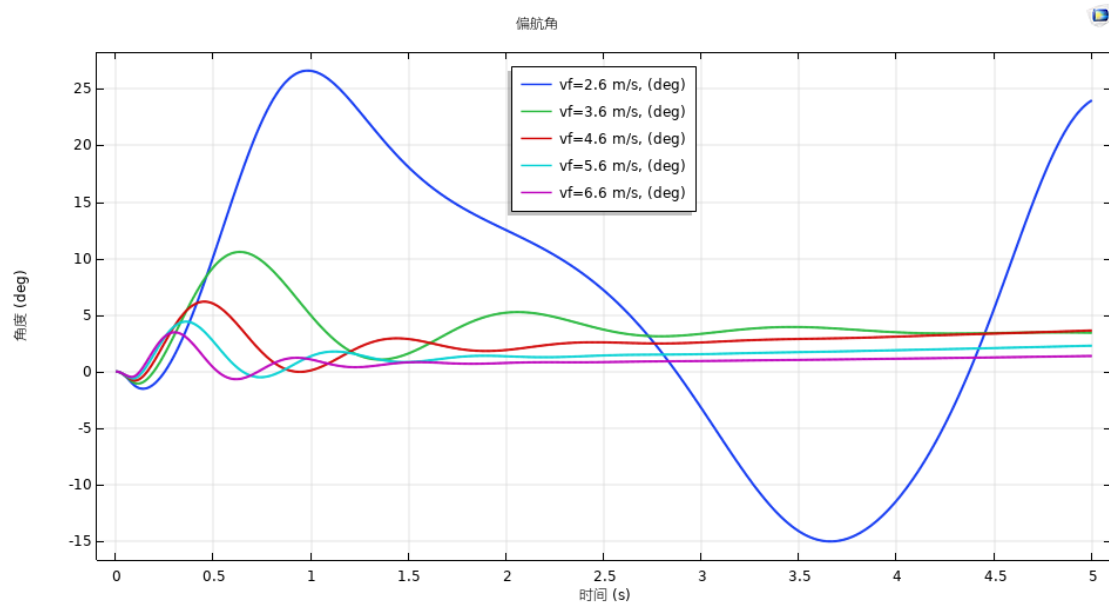
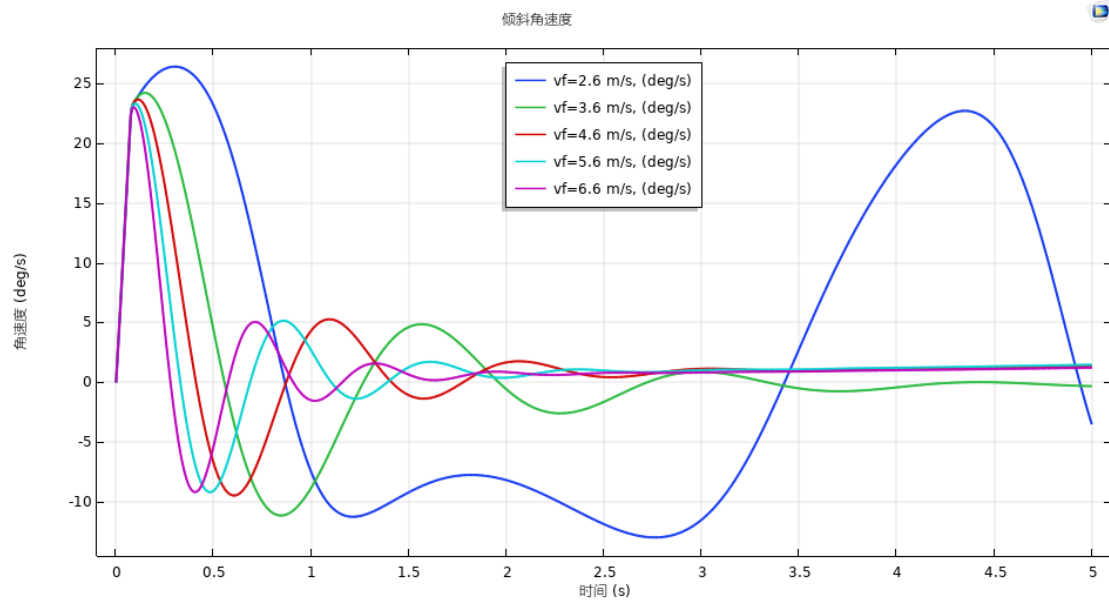
对四个图像的分析：

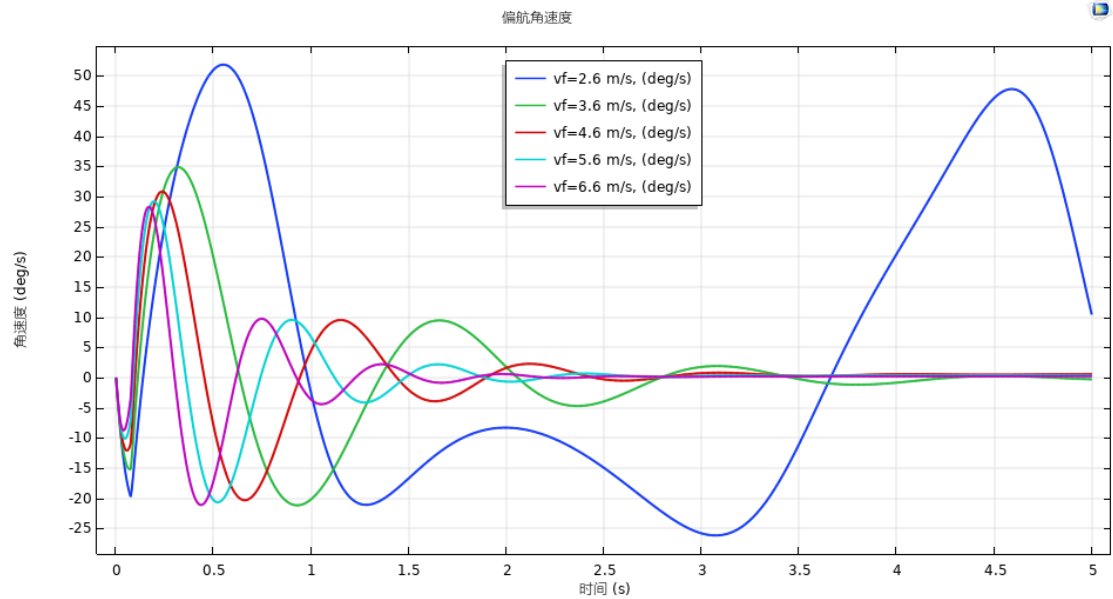
可以看出， $v_f=2.6\sim3.6\text{m/s}$ 时，角度波动剧烈，不稳定； 4.6m/s 时，倾斜角最终趋于 0，稳定； 5.6m/s 时，在相当时间内两角度将保持相对稳定的非零值，自行车做圆周运动； 6.6m/s 时，两角度对应曲线明显发散，不稳定

(2) 后车架质量 10kg , 干扰力 60N 。

1) $v_f=2.6\sim6.6\text{m/s}$:





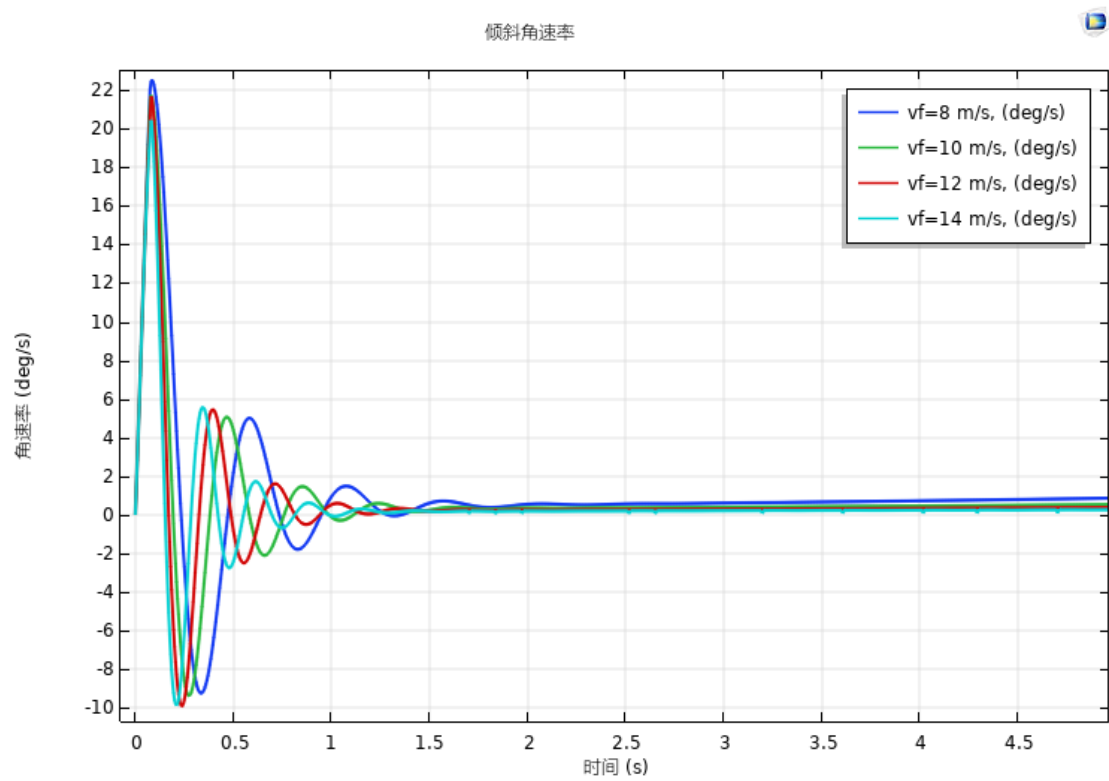
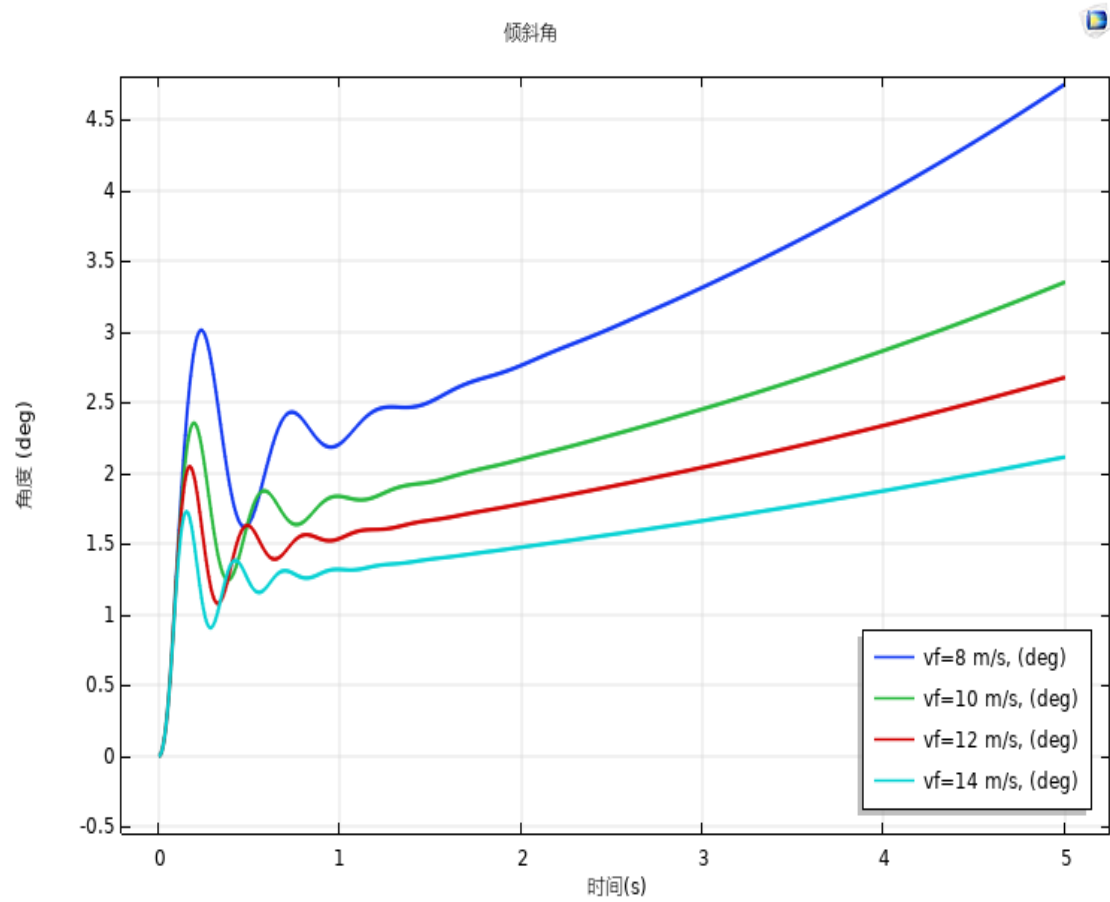


对四个图像的分析：

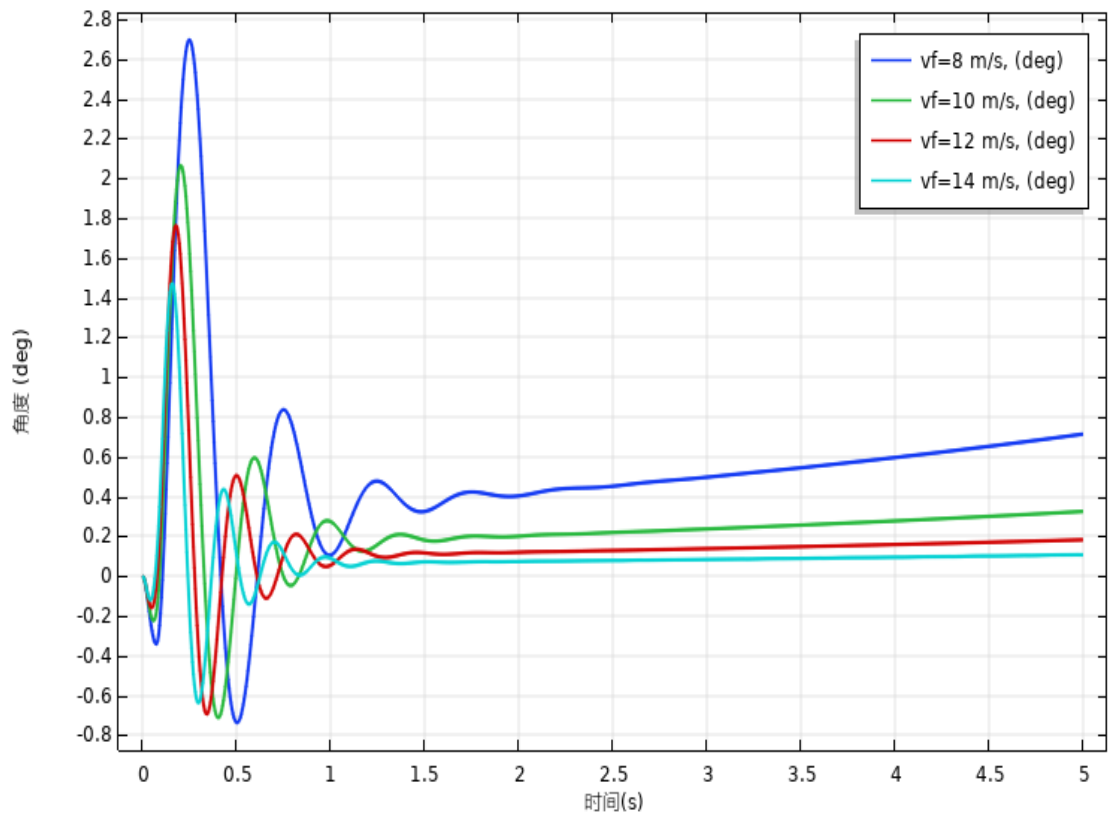
可以看出， $v_f=2.6\text{m/s}$ 时，两个角度均变化剧烈，不稳定； 3.6m/s 时，虽然自行车最终趋于做较稳定的圆周运动，但开始 1.5 秒变化仍较剧烈； $4.6\sim 6.6\text{m/s}$ 时则两角度均发散，最终将倾倒。

发现在 $2.6\text{-}6.6\text{m/s}$ 区间内稳定程度较差，进一步扩大速度范围：

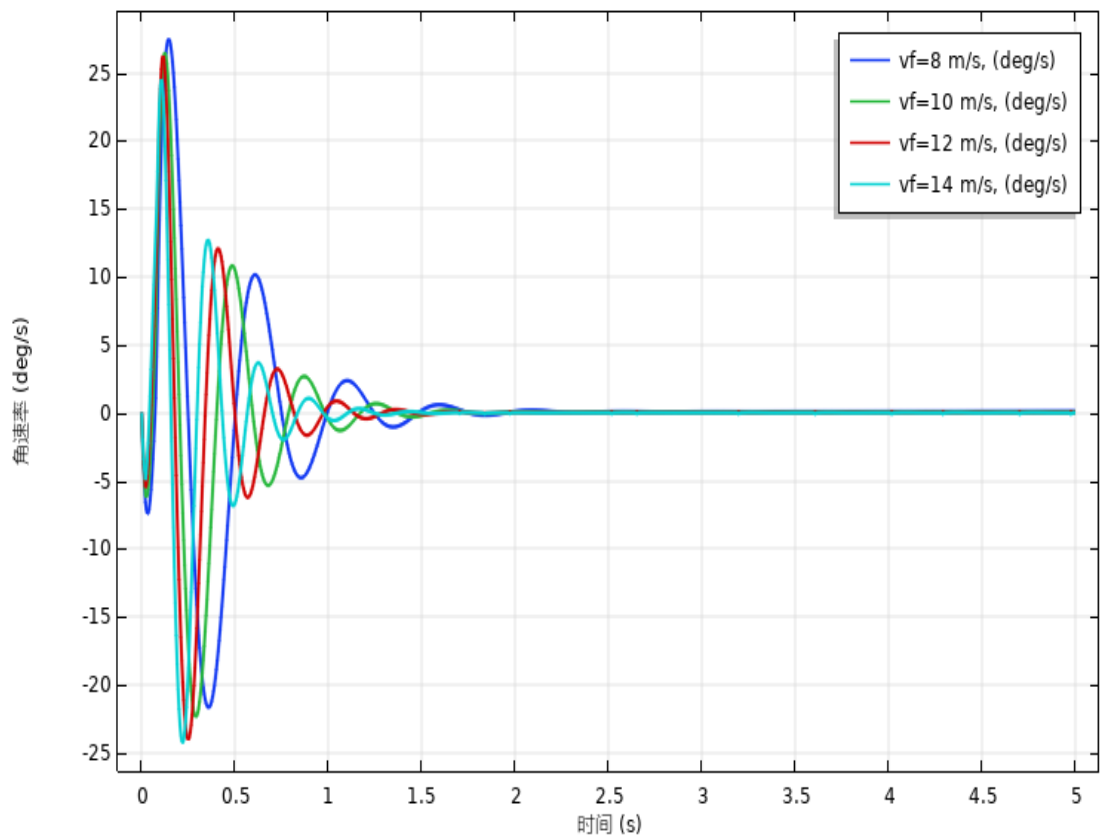
2) $v_f=8.0\sim 14.0\text{m/s}$:



偏航角



偏航角速率



对四个图像的分析：

可以看出，随着初速度 v_f 变大，倾斜角和偏航角虽然随时间增大但增大速度减小（即倾倒时间延后），可以认为自行车在一段时间内相对稳定，但由于图像仍然发散，则最终仍会倾倒。

可见当不考虑人的质量时，自行车的自稳定效果总体较差。

【2】前插倾角（）对自平衡的影响：

(1) 后车架质量 85kg, 干扰力 500N, 初速度 4.6m/s

下图中，

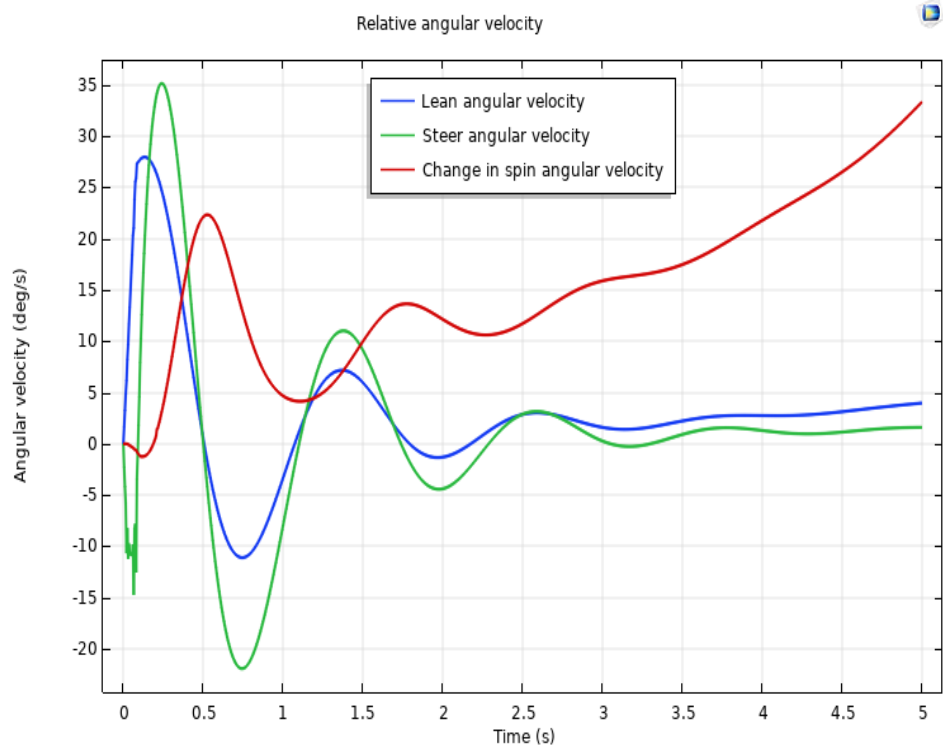
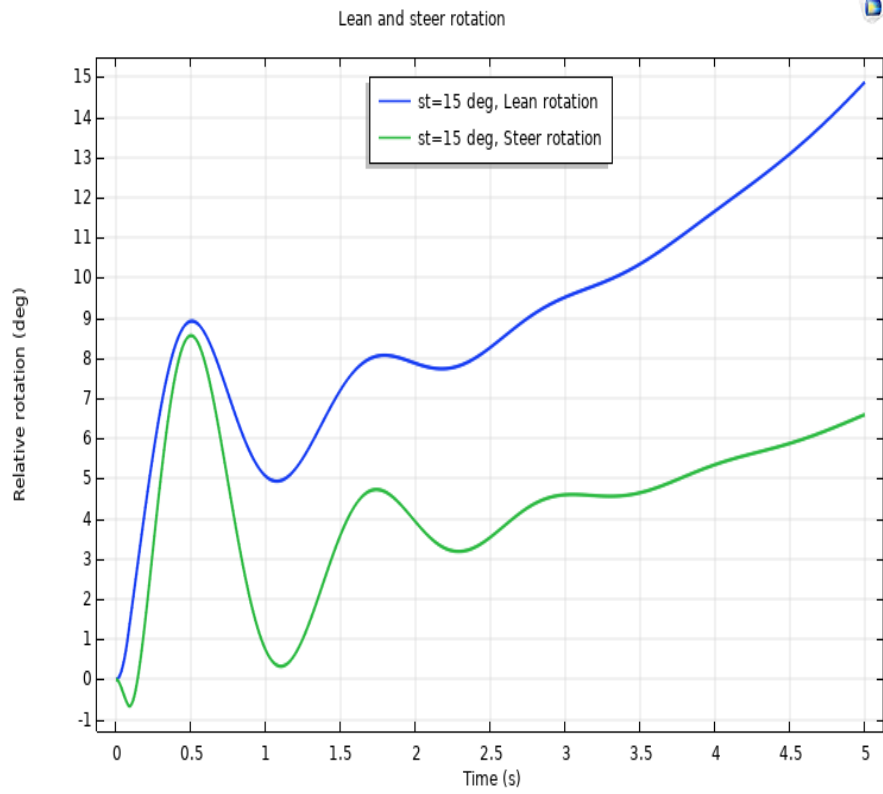
lean rotation: 倾斜角 steer rotation: 偏航角

lean rotation velocity 倾斜角速度 steer rotation 偏航角速度

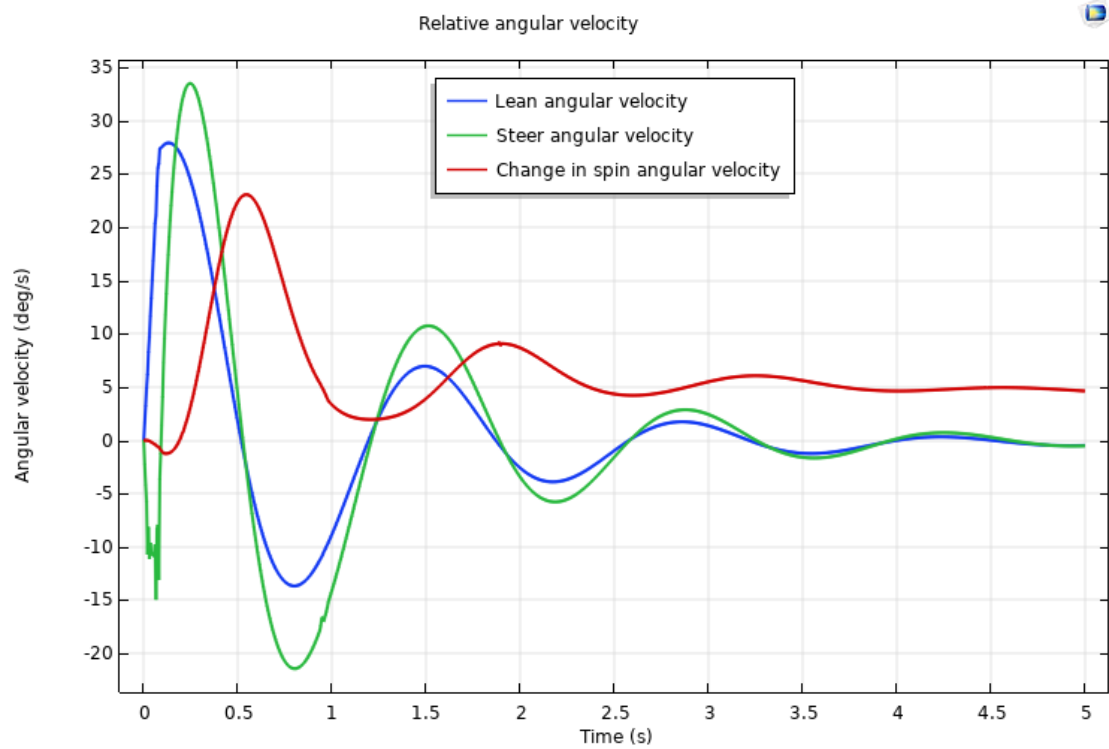
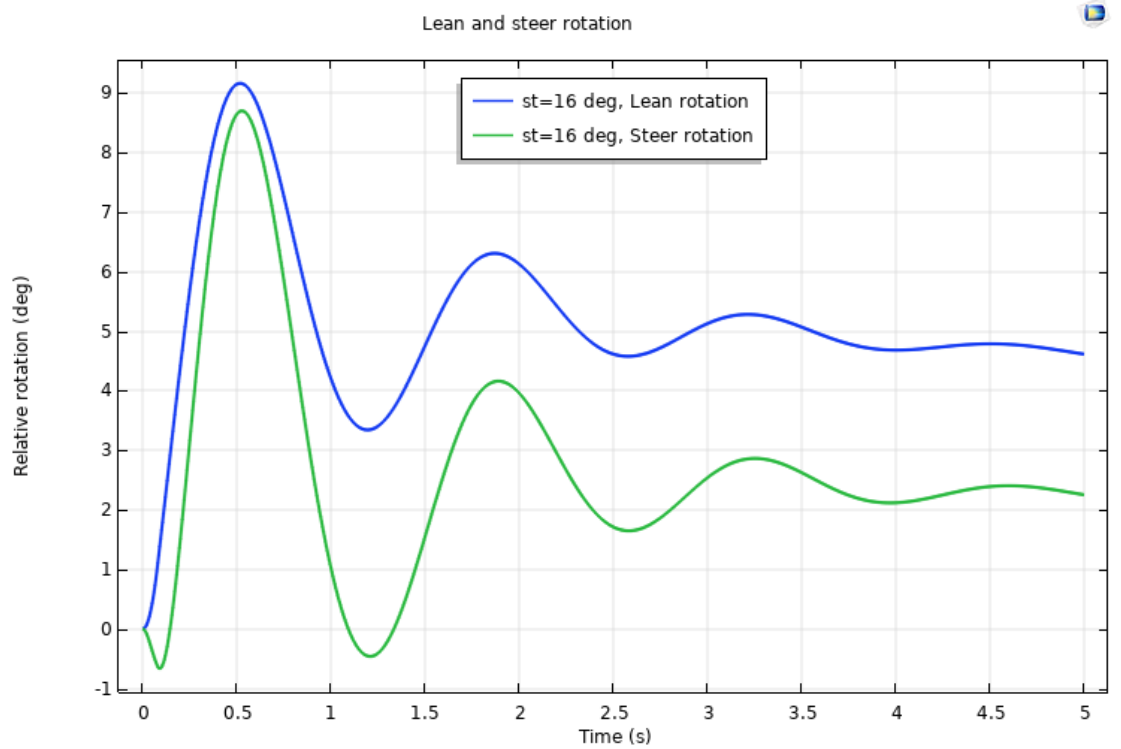
change in spin angular velocity (总角速度变化)

1) 前叉倾角 = $15^\circ \sim 21^\circ$

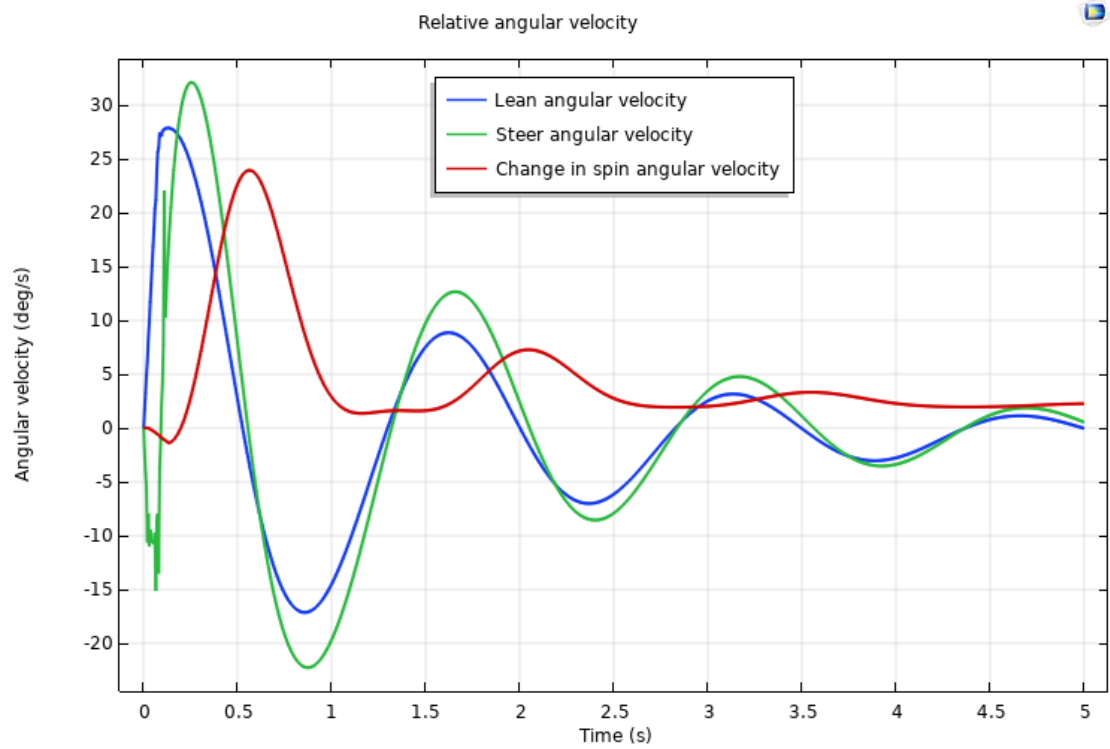
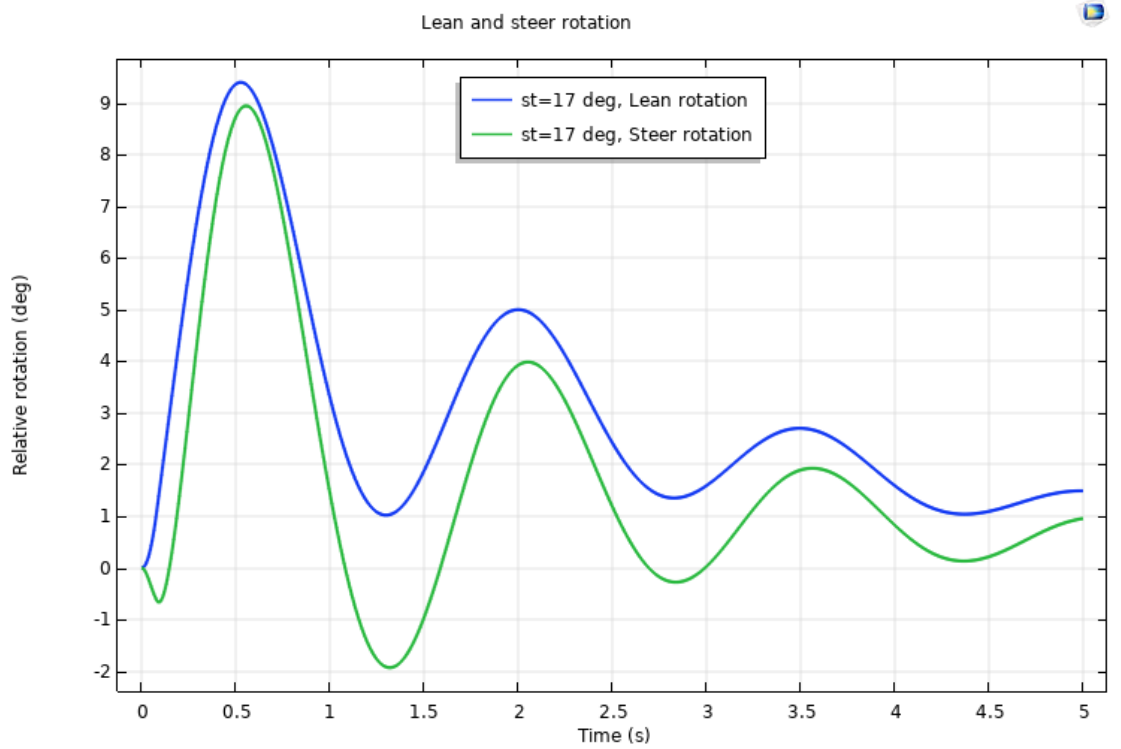
15° :



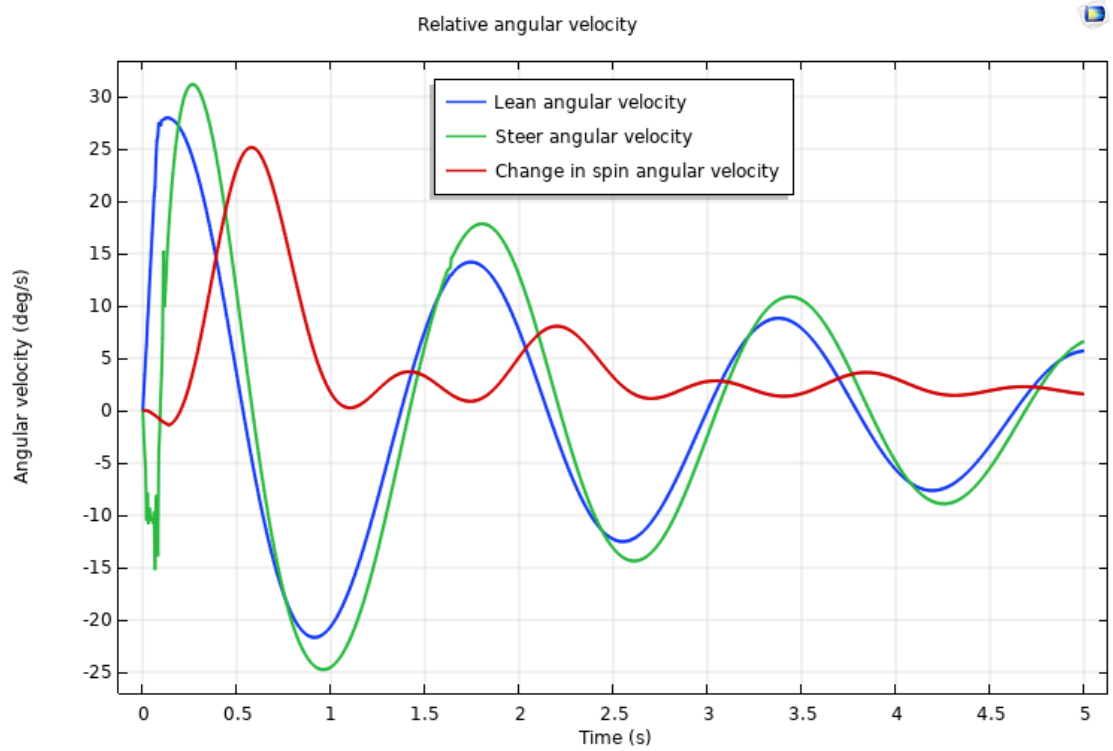
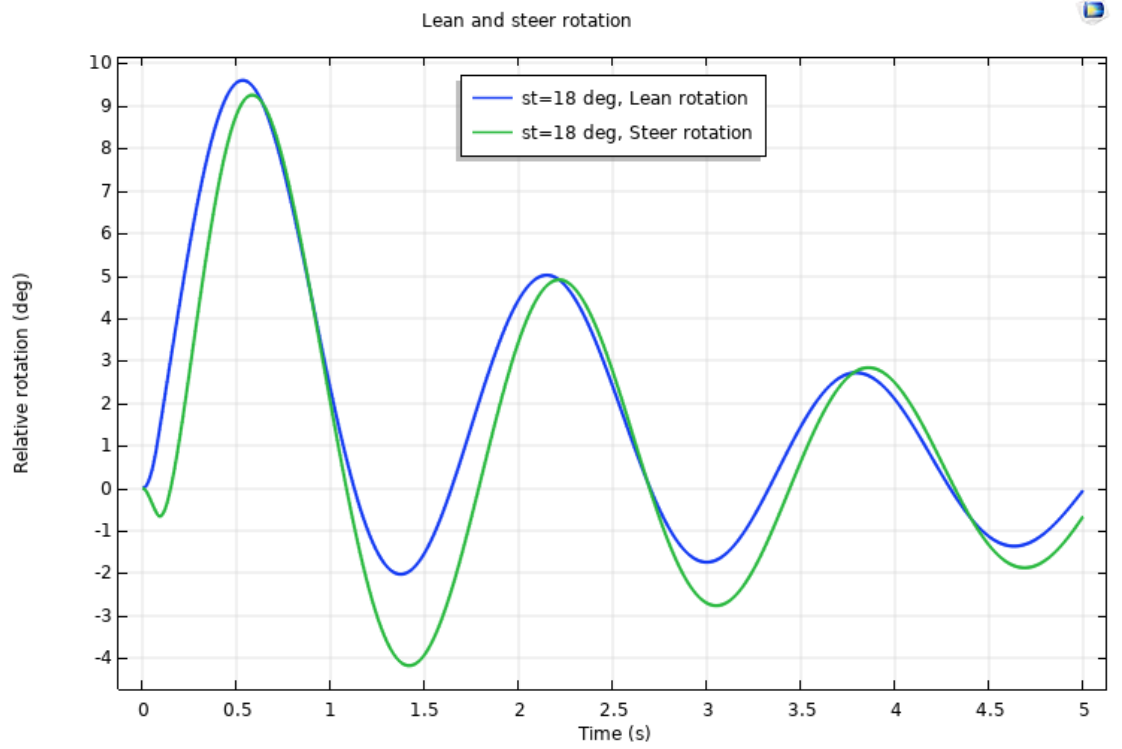
16° :



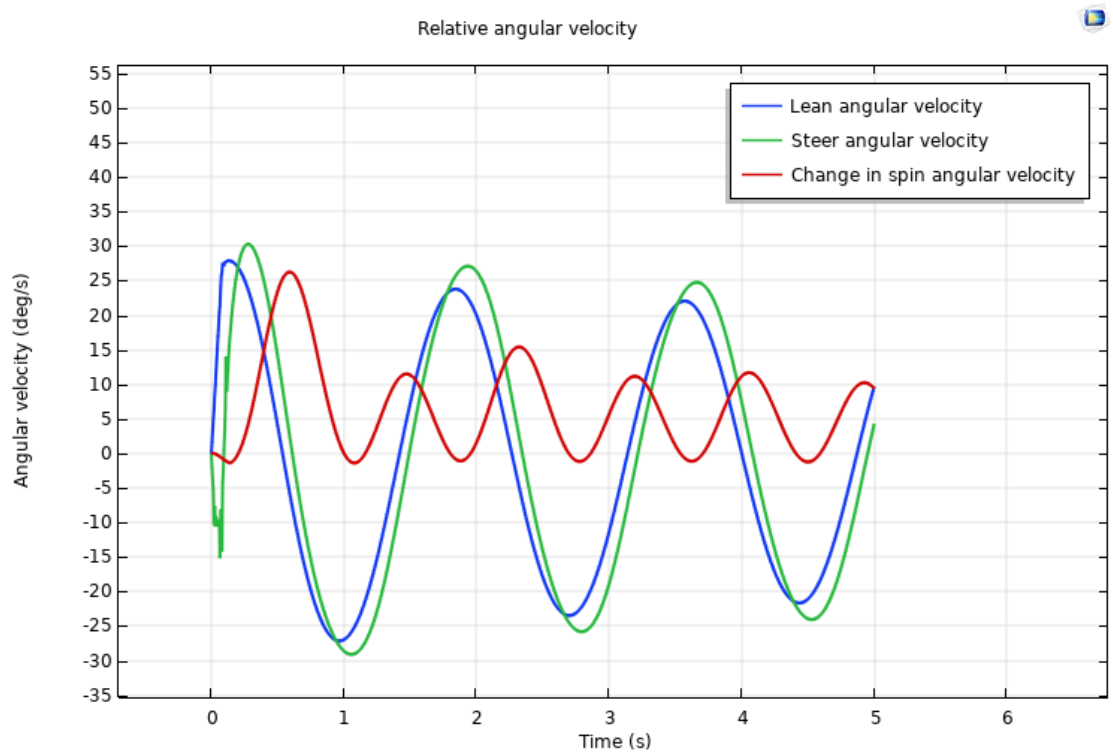
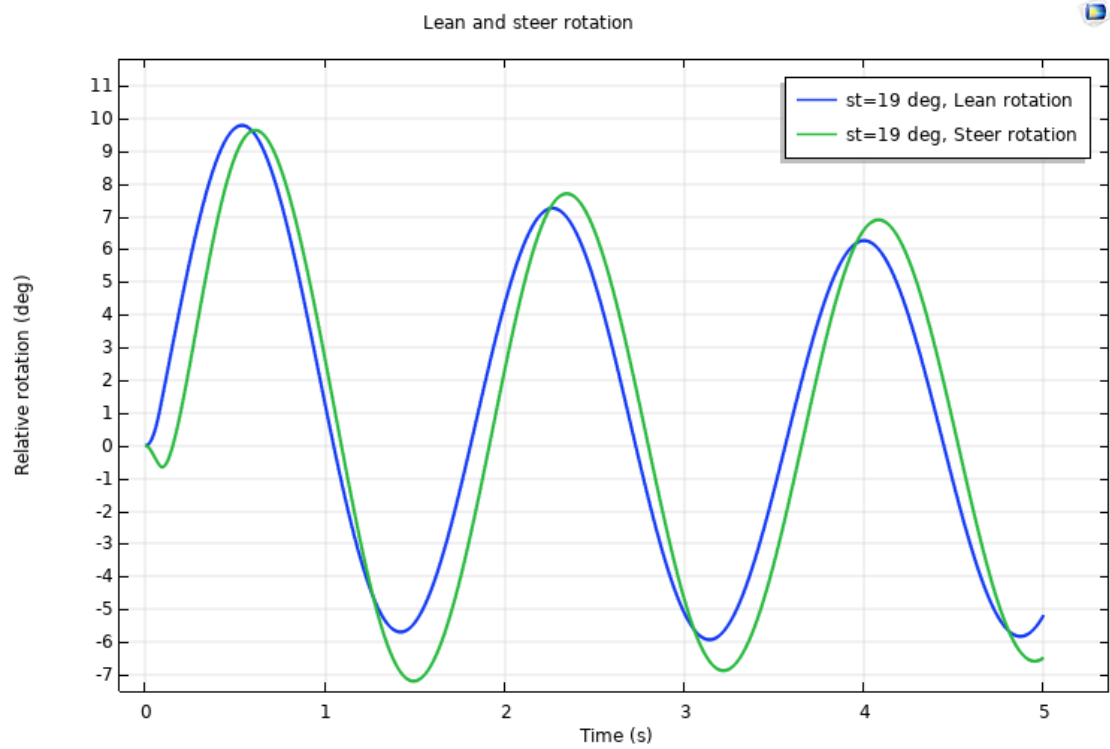
17° :



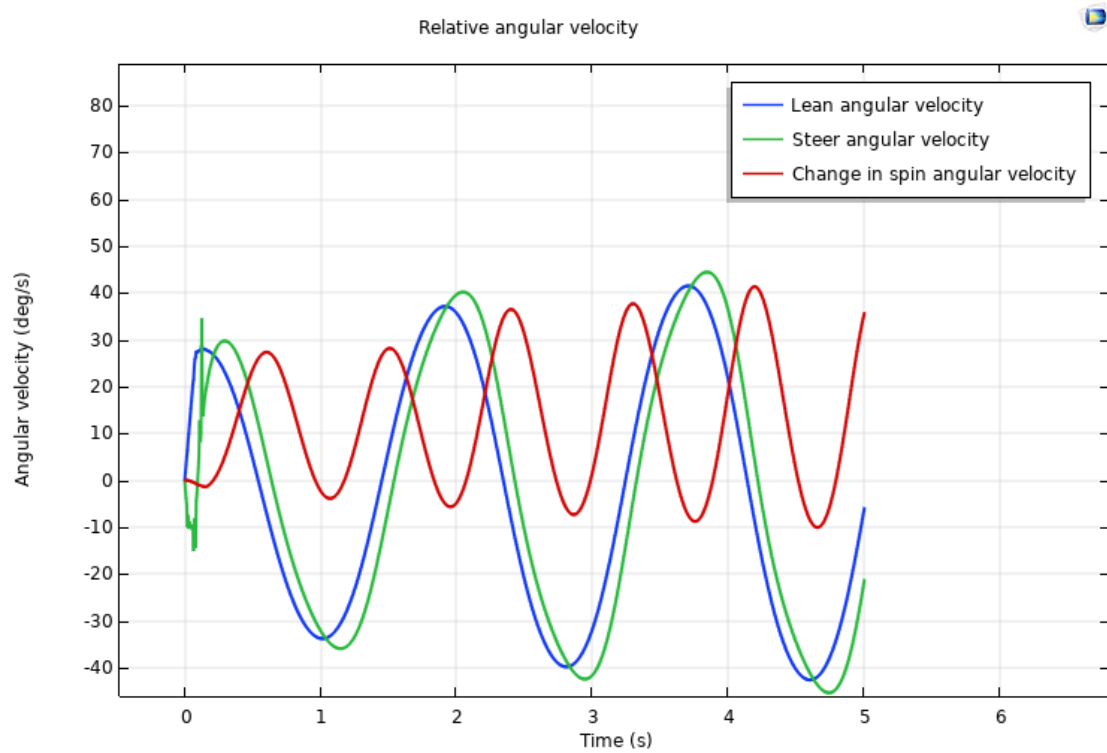
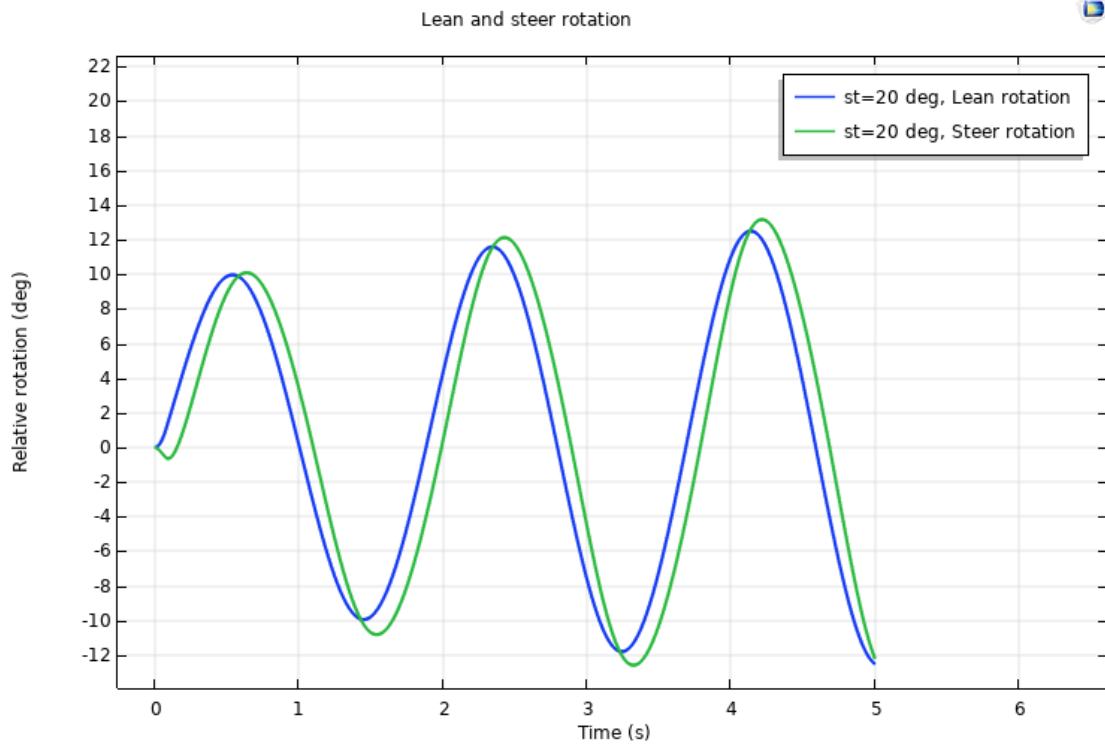
18° :



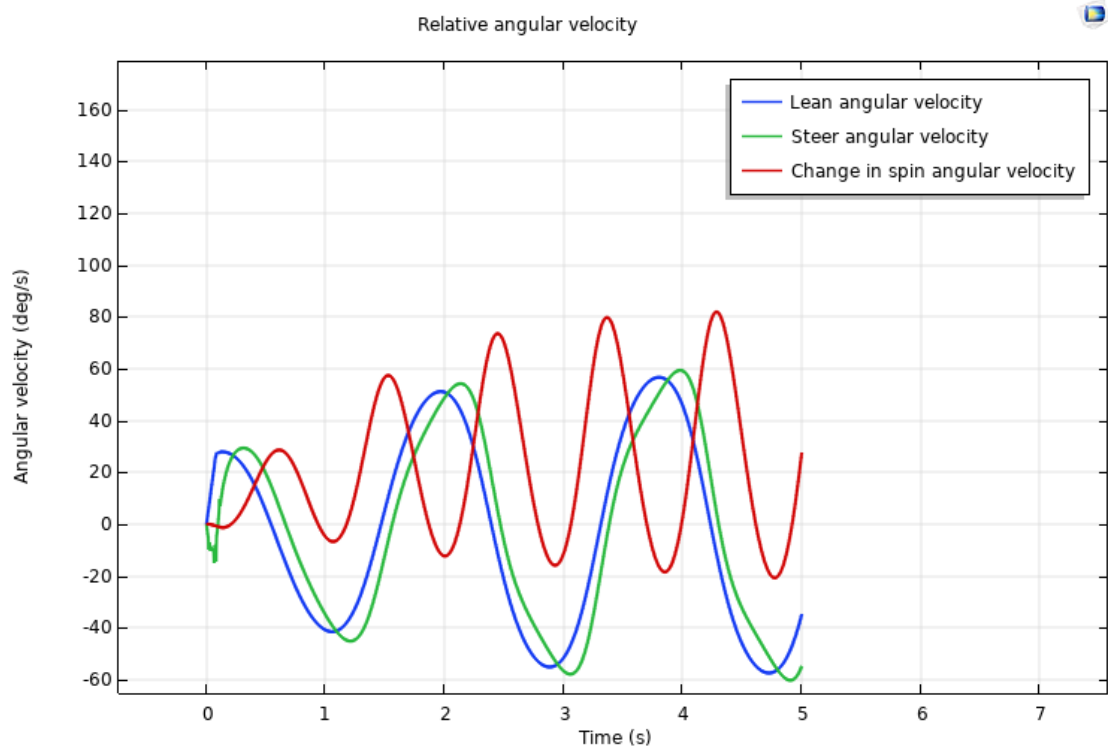
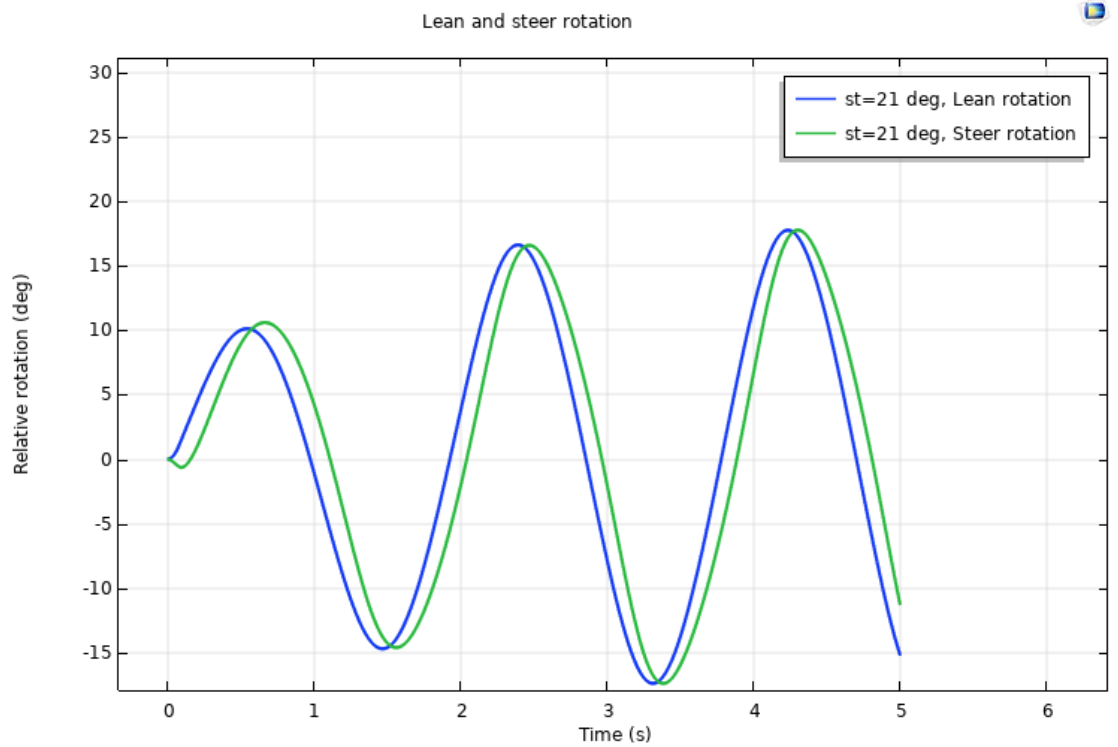
19° :



20° :



21° :

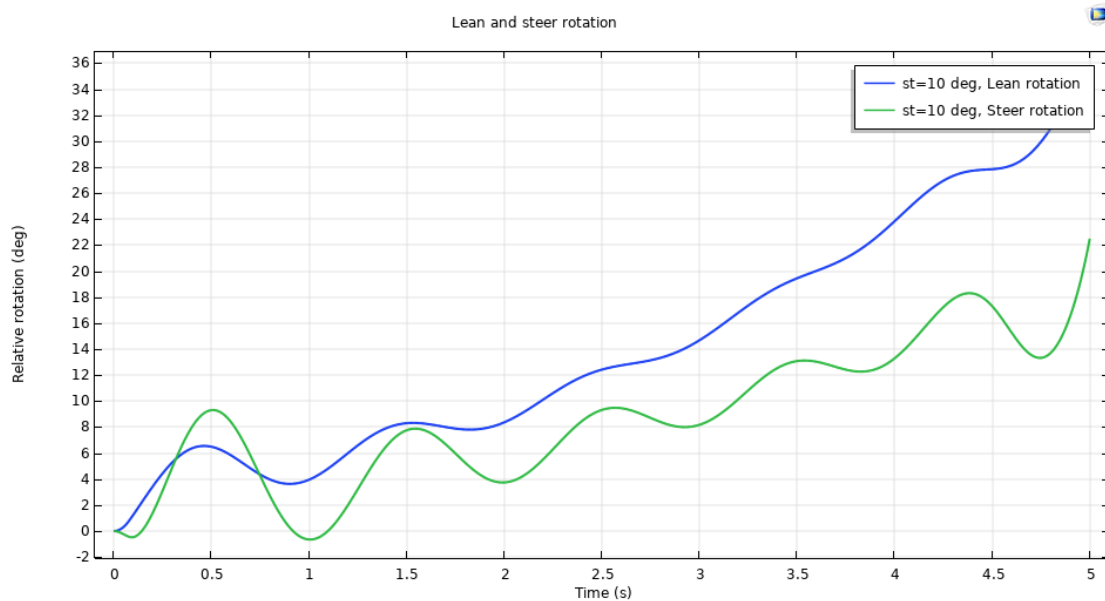


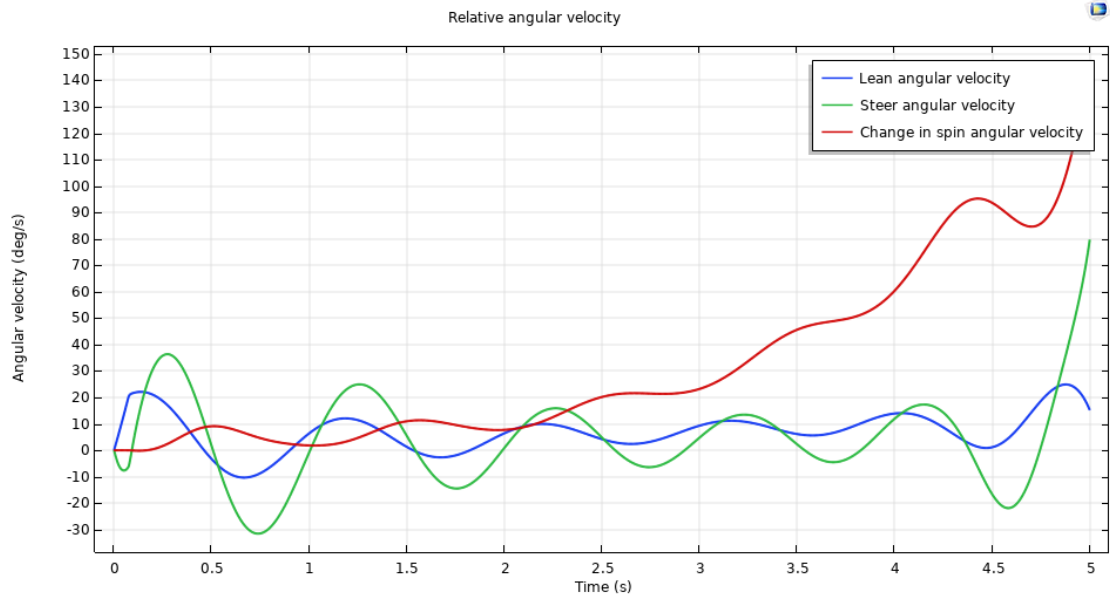
在倾角为 15° 时，倾角和转向角继续随着时间的增加而变大，使该构型变得不稳定。自行车在 16° 到 19° 的范围内能够保持稳定，而超过该角度范围时则不稳定。当转向倾角大于 19° 时，倾角和转向角会振荡，且振荡次数会随着时间的增加而增加，使自行车变得不稳定。

(2) 后车架质量 10kg, 干扰力 60N, 初速度 3.6m/s

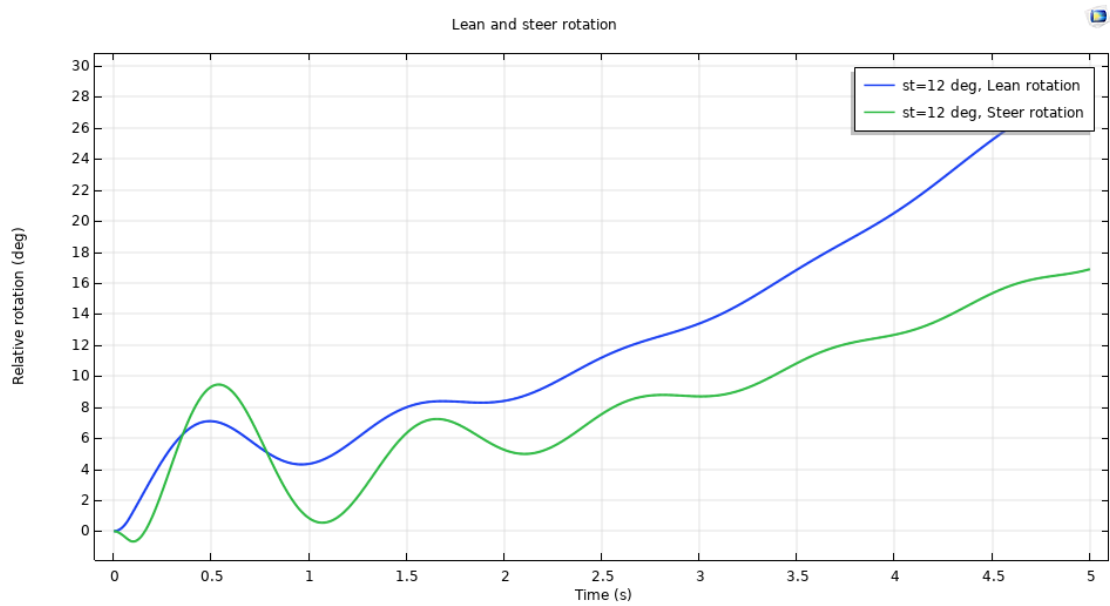
1) 前叉倾角 = $10^\circ \sim 30^\circ$, 步长 2 度

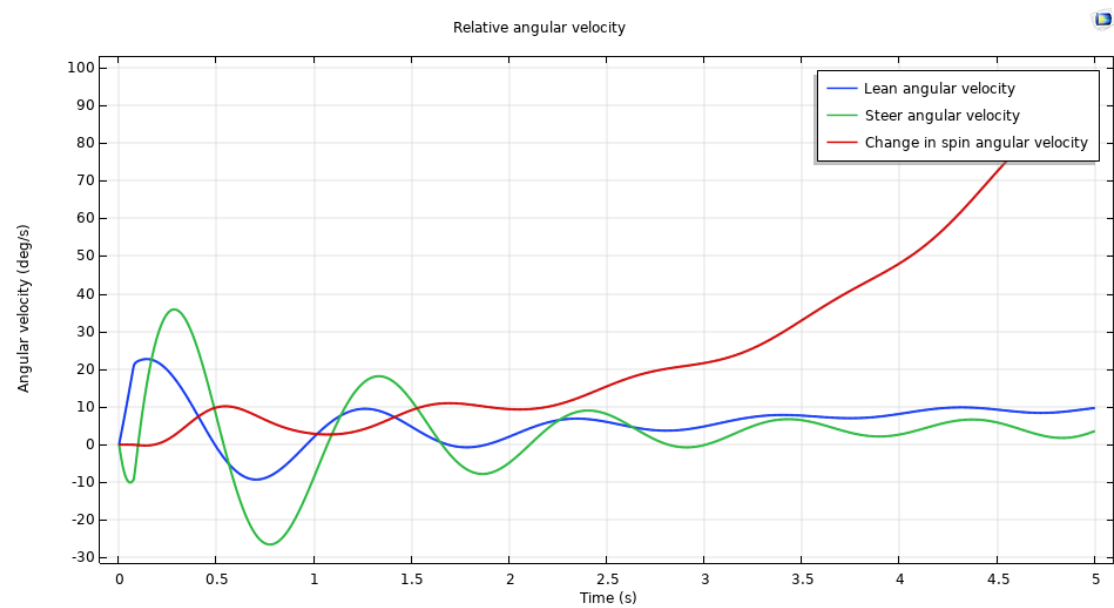
10 度:



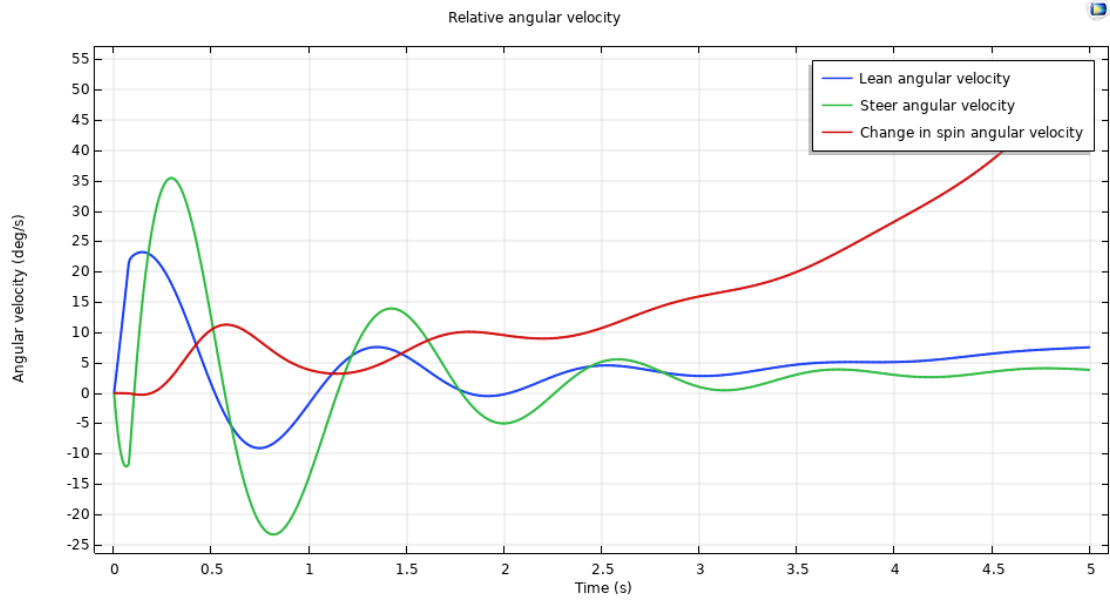
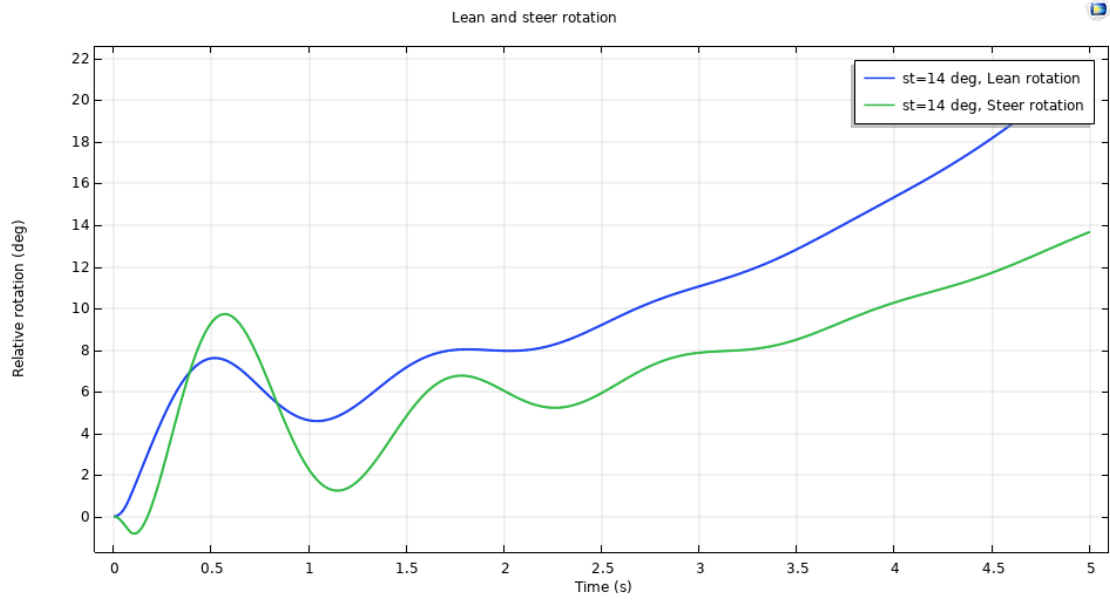


12 度:

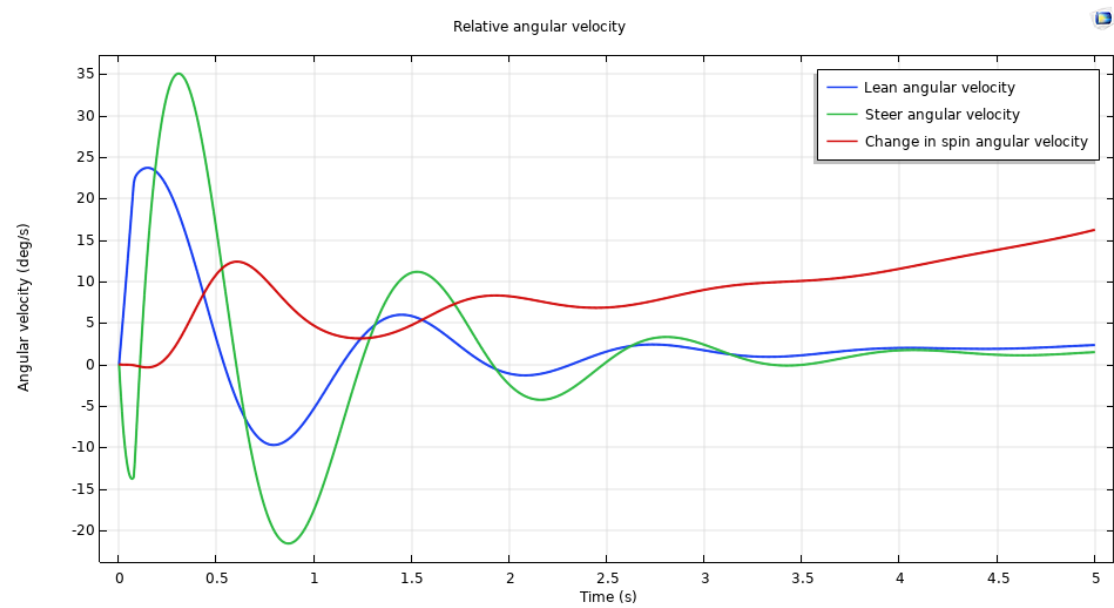
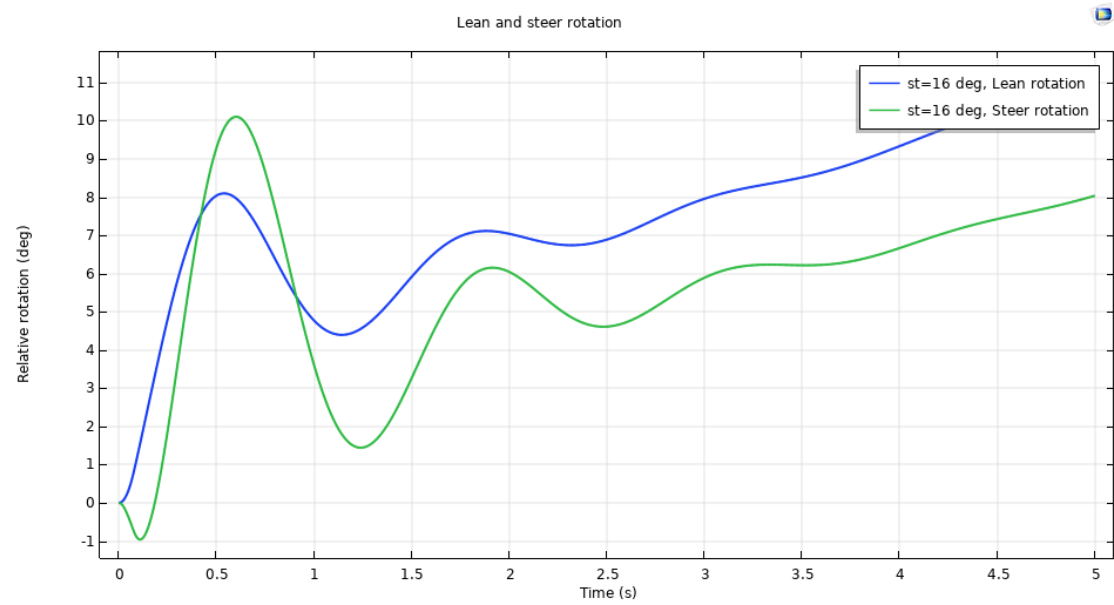




14 度:

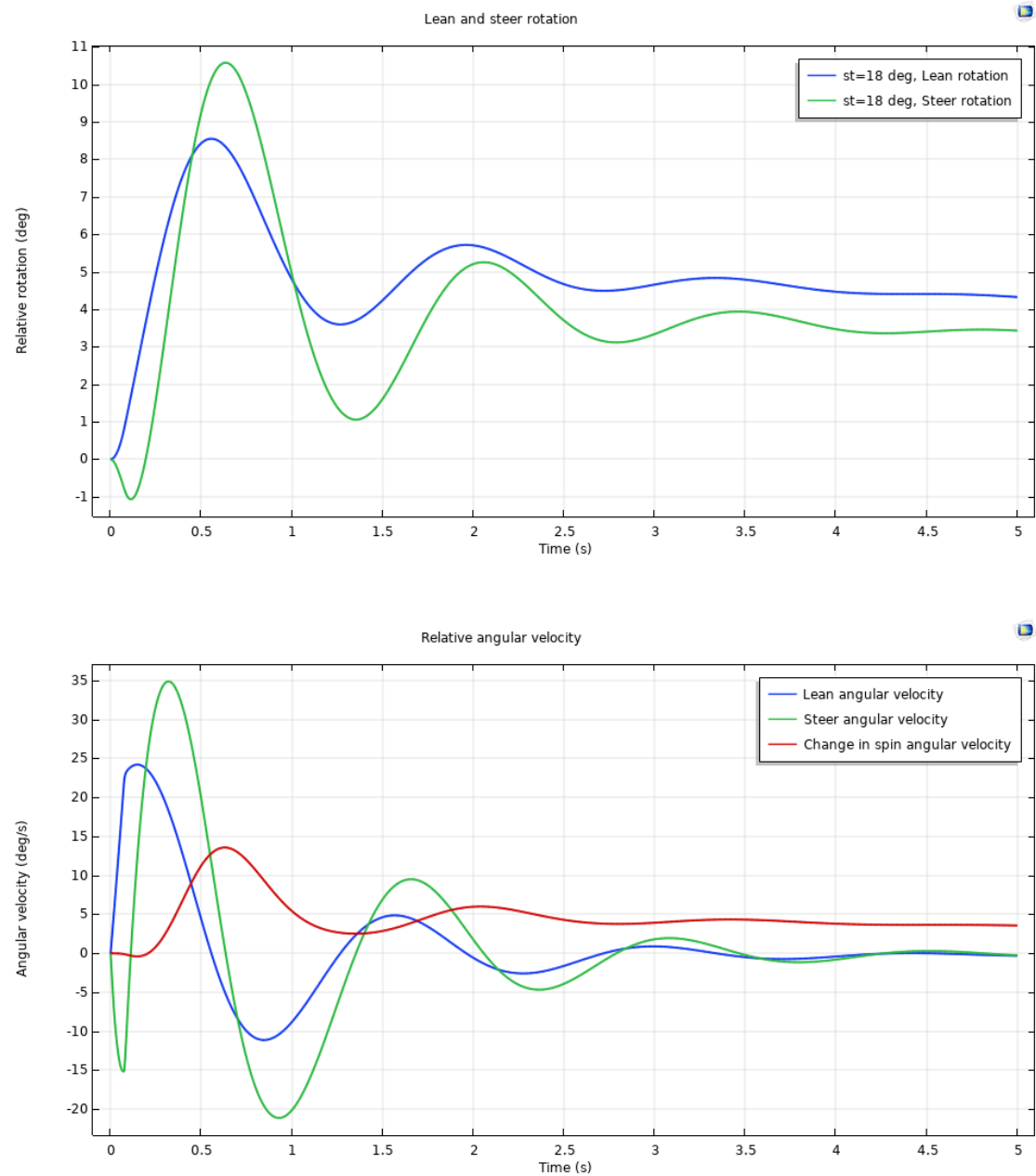


16 度:



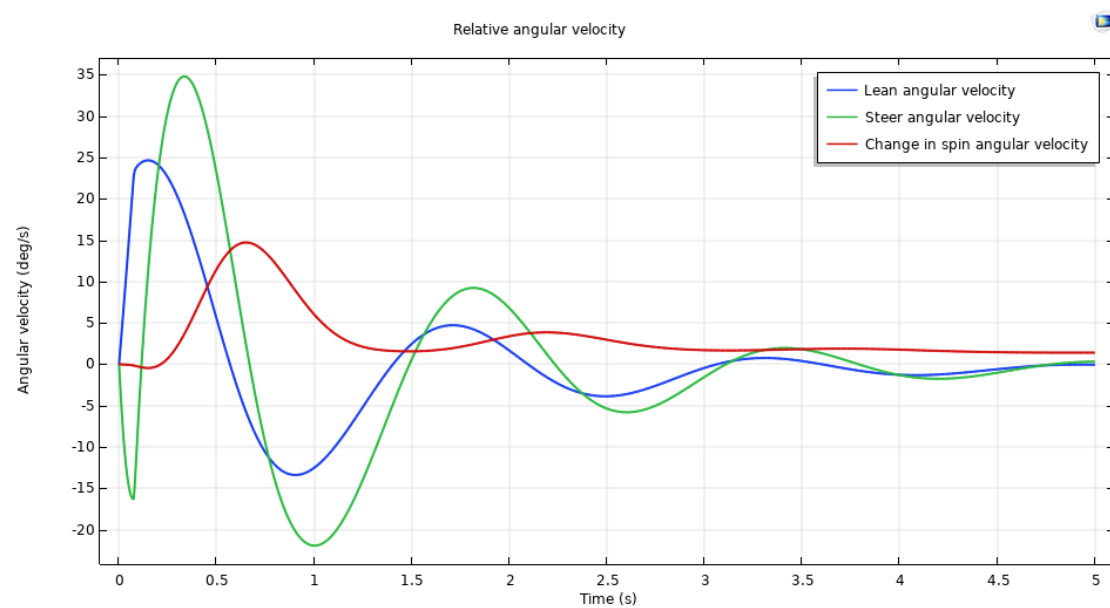
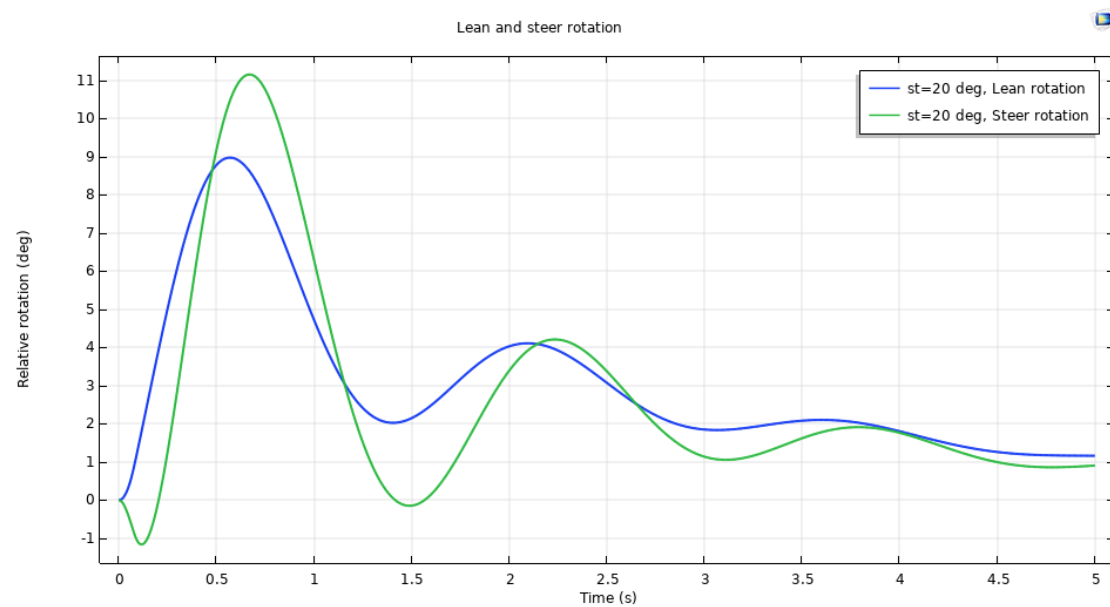
从图像中可以看出，随着时间的增大，10~16 度时倾斜角和偏航角逐渐增大，不稳定。

18 度:



有图像可知，18 度时倾斜角速率和偏航角速率最后趋近于 0。偏航角和倾斜角最后趋近于一个非零常数。

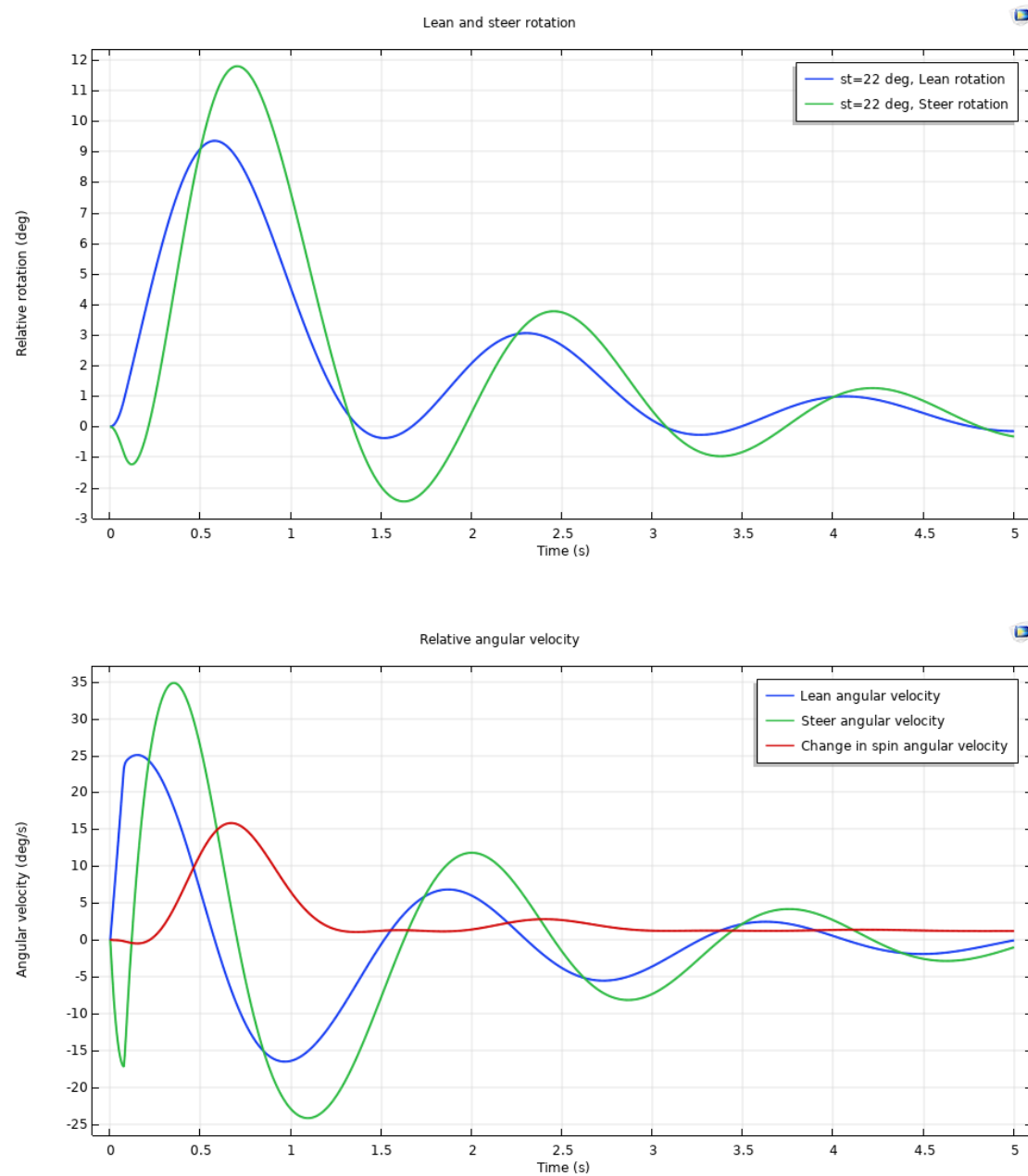
20 度:



同 18 度。倾斜角速率和偏航角速率最后趋近于 0。偏航角和倾斜角最后趋近于一个非零常数。

并且 20° 时偏航角和倾斜角最后的稳定值比 18° 时更接近 0。

22 度:

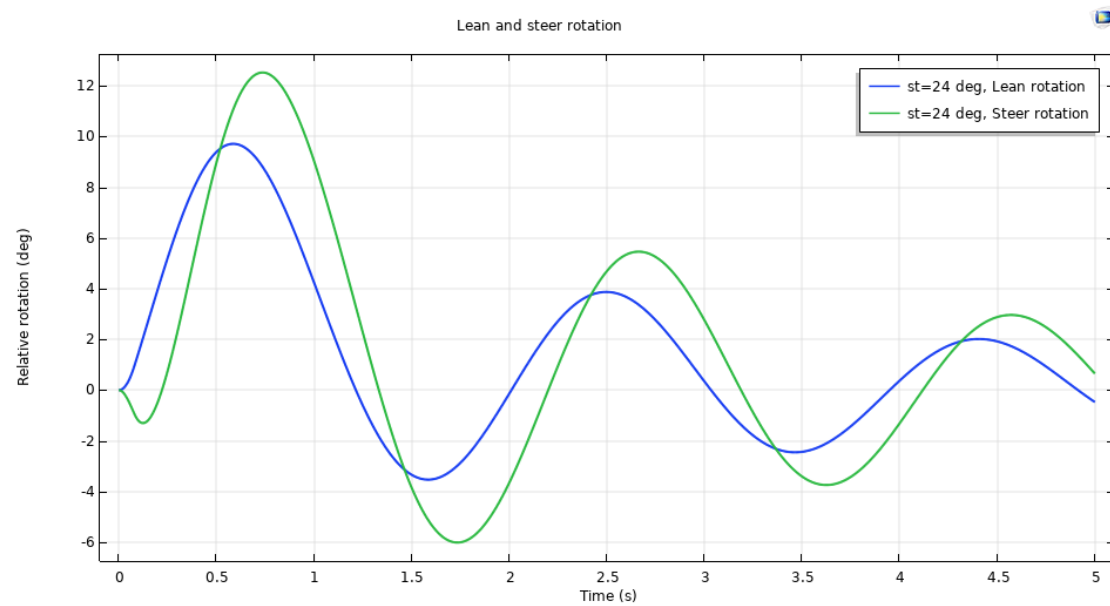


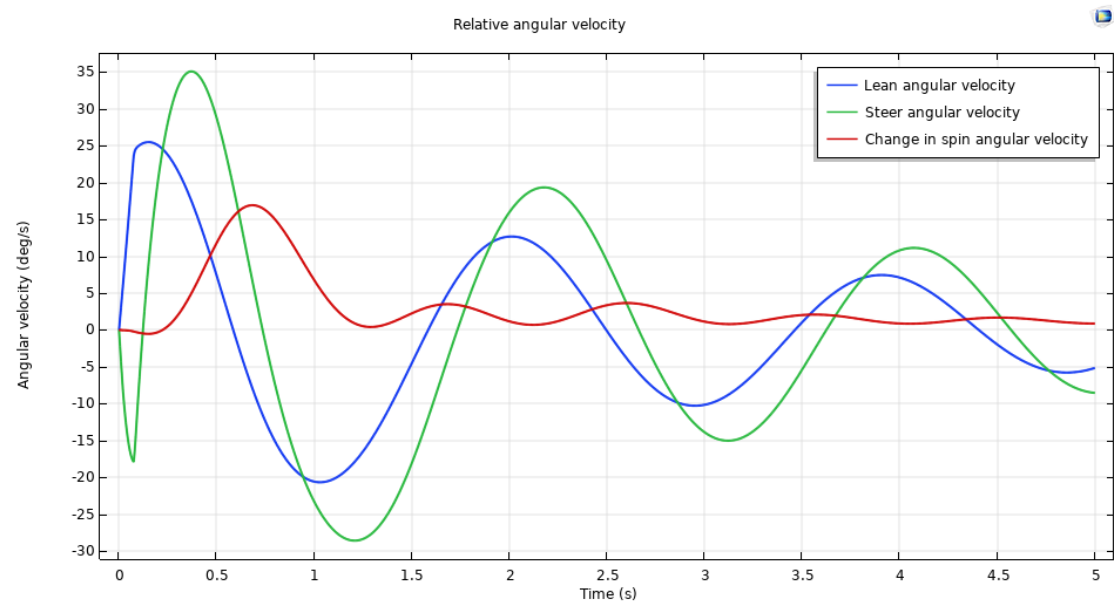
从第二幅图看出 change in spin angular velocity（总角速度变化）也随时间增大而趋近于零，即自行车最终速度将恢复到初速度。

可以认为自行车能够恢复到稳定的匀速直线运动状态，故该条件下 22 度左右自行车自平衡性最好。

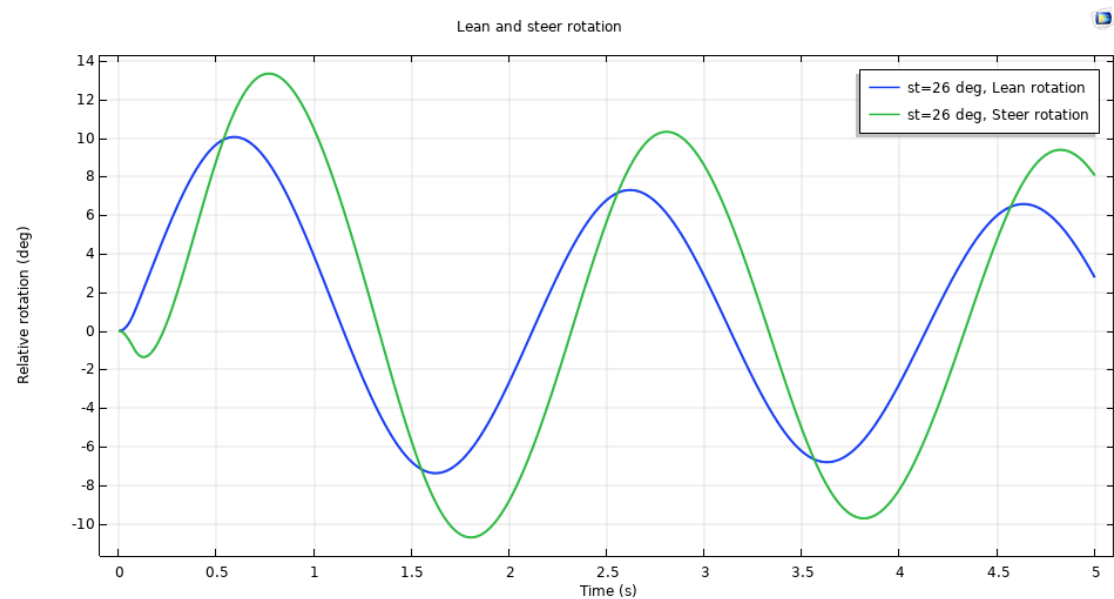
尝试着继续增大前叉倾角：

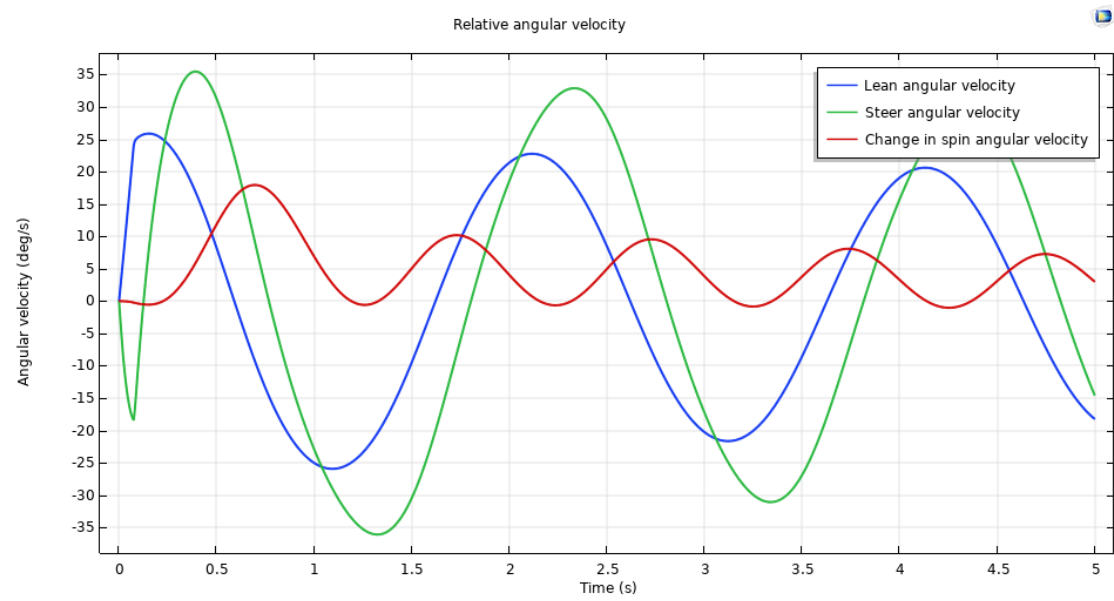
24 度：



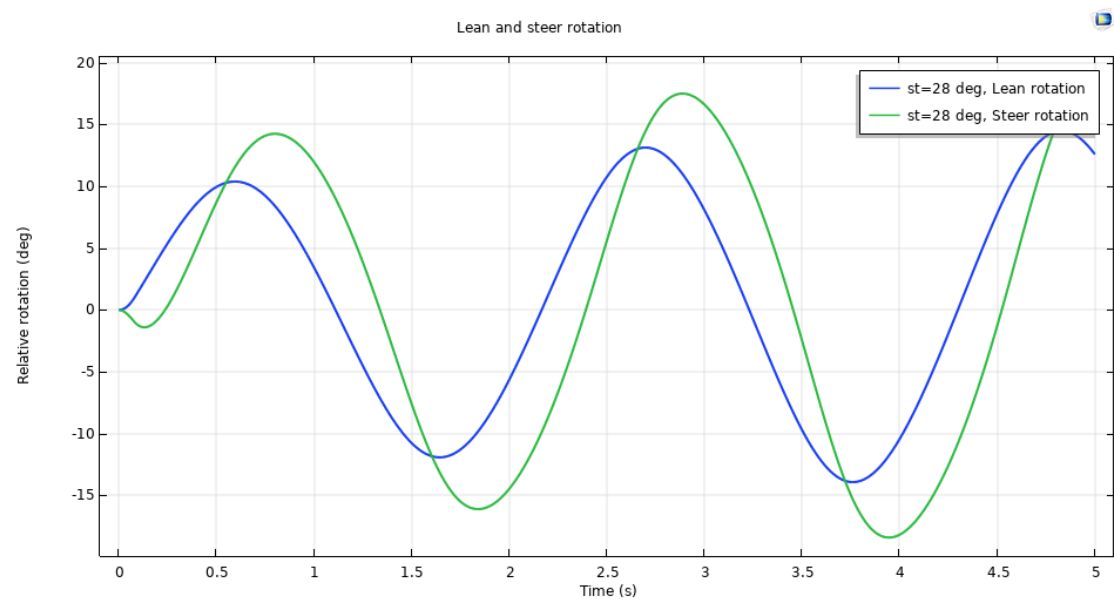


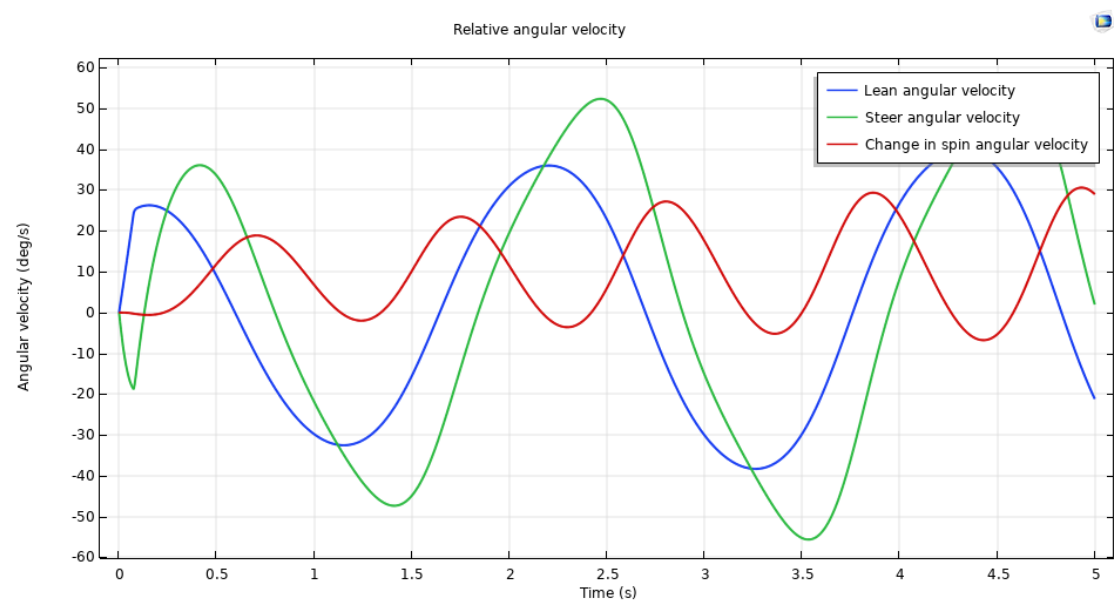
26 度:



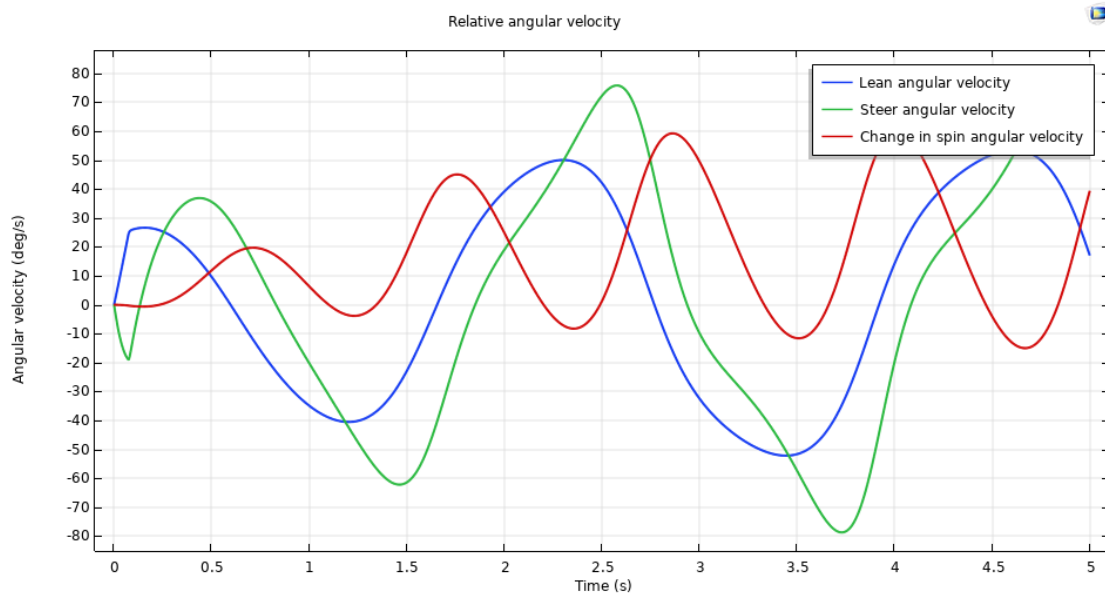
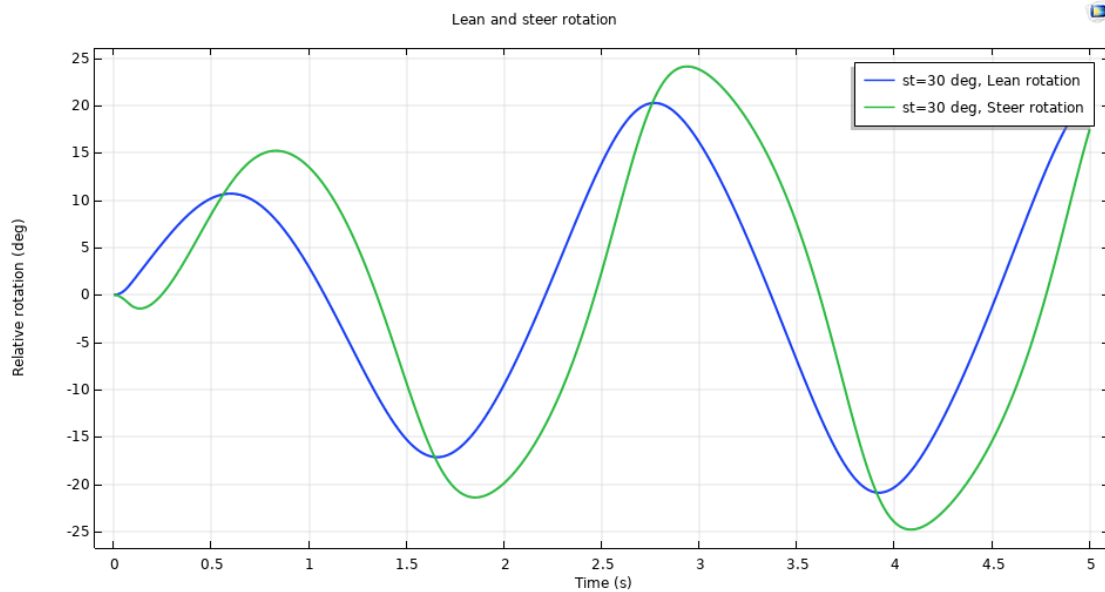


28 度:





30 度:



随着前叉倾角的继续增大，图像的周期性波动逐渐激烈，24、26 度时仍可收敛，从 28 度开始波动随时间增大越来越剧烈，发散，不稳定。

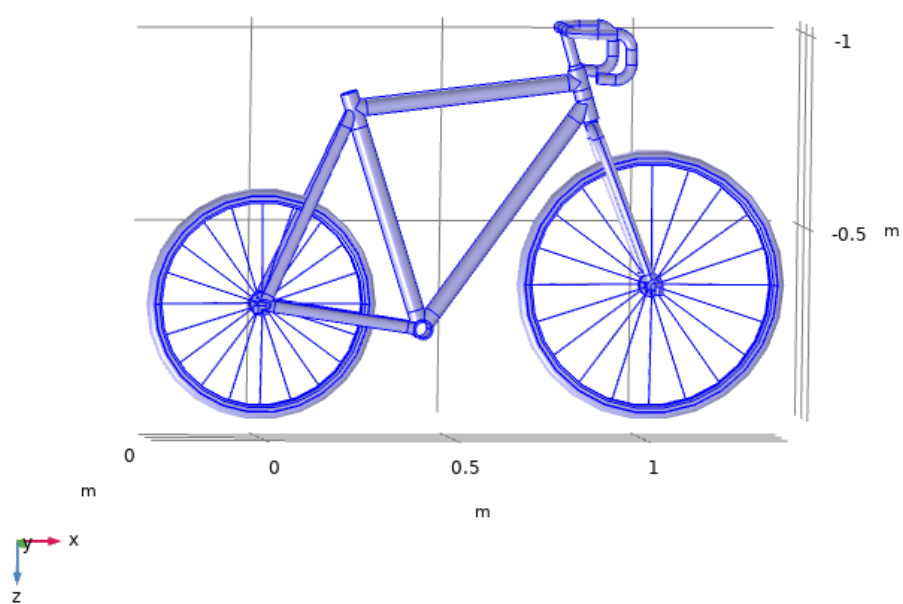
结论：10° ~16° ：不稳定，稳定性与前叉倾角正相关

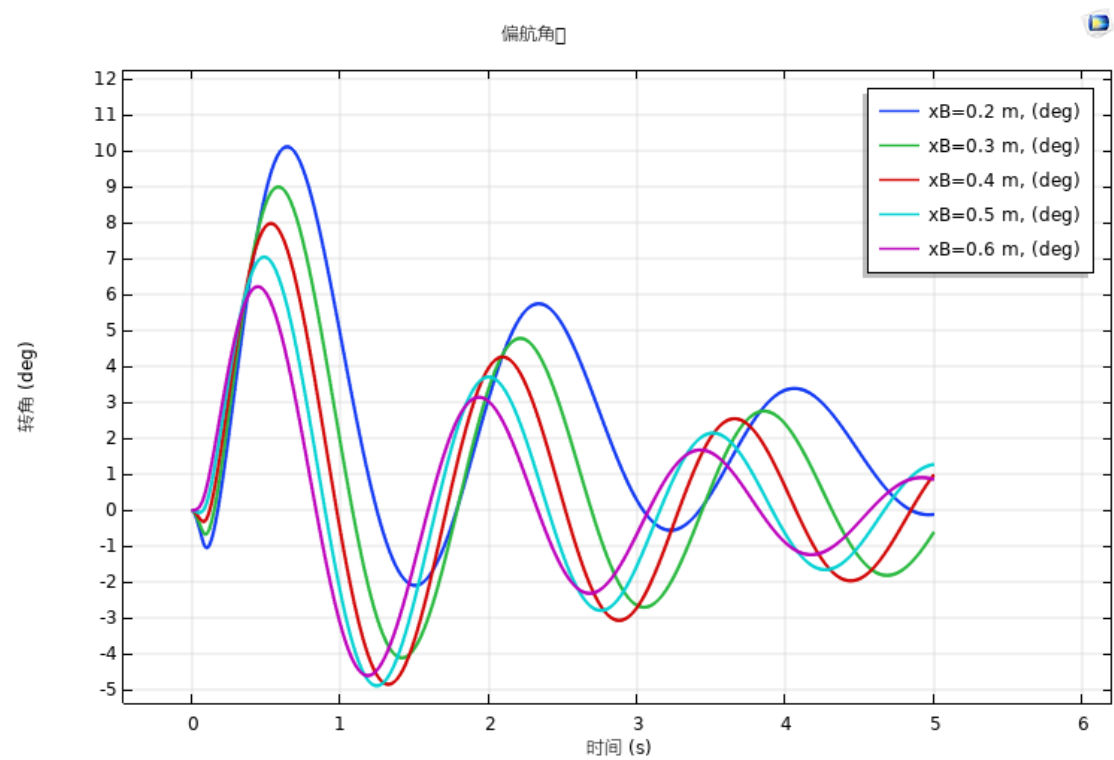
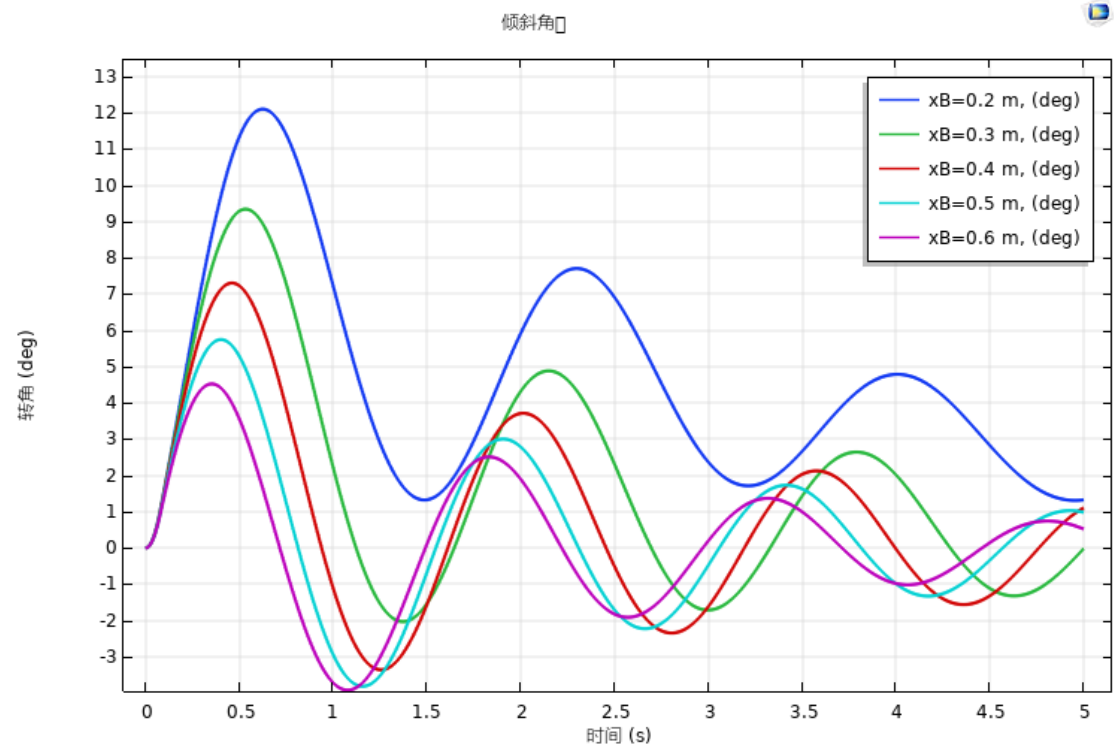
18° ~20° ：做 3 稳定的圆周运动，半径与前叉倾角正相关。

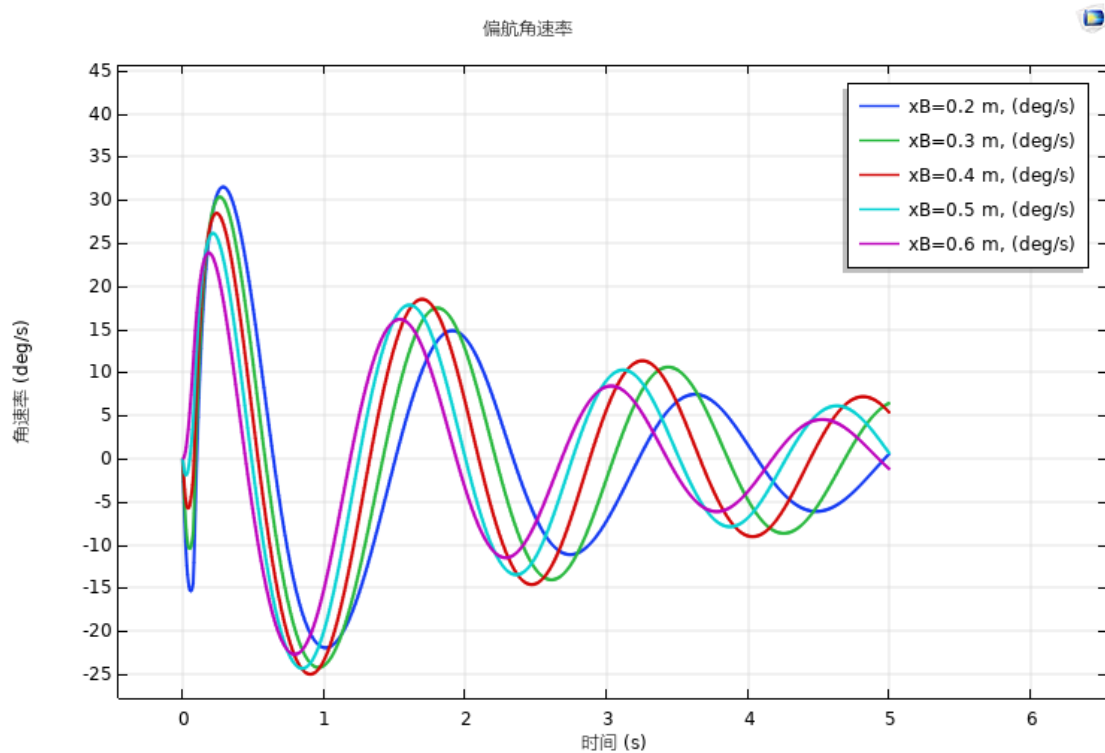
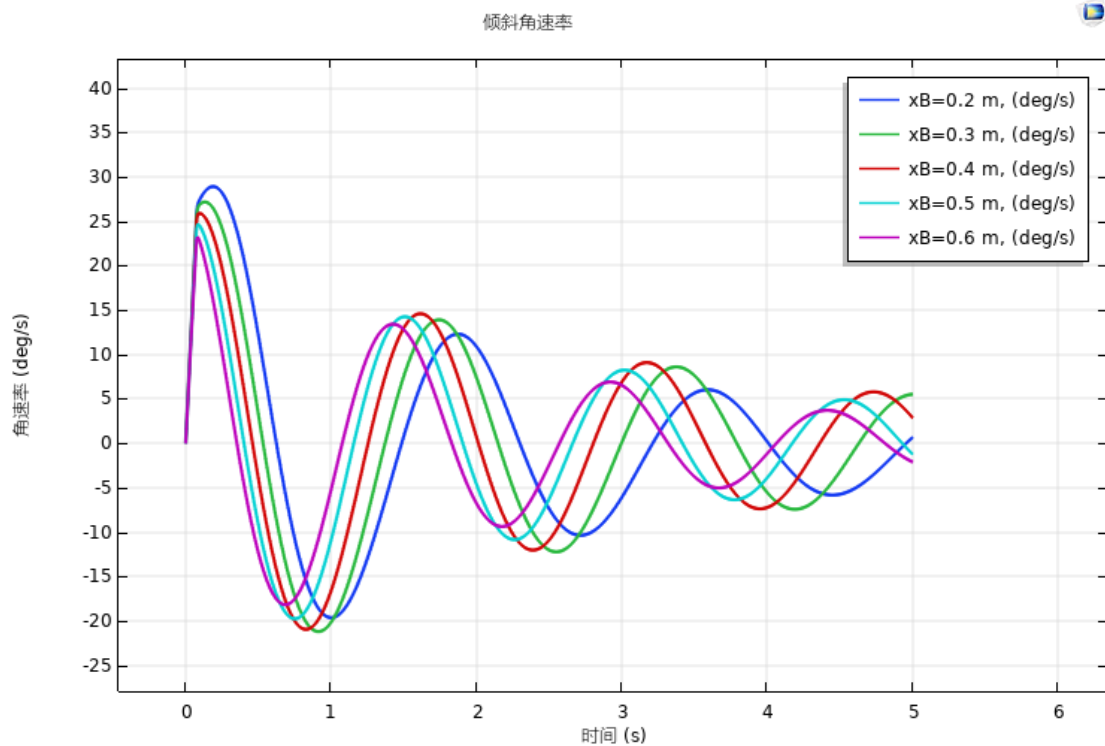
22° ~26° ：稳定，最终做匀直运动，稳定性与前叉倾角负相关。

≥28° ：不稳定，由于左右晃动过于剧烈而倾倒，稳定性与前叉倾角负相关。

【3】重心位置 () 对自平衡的影响：

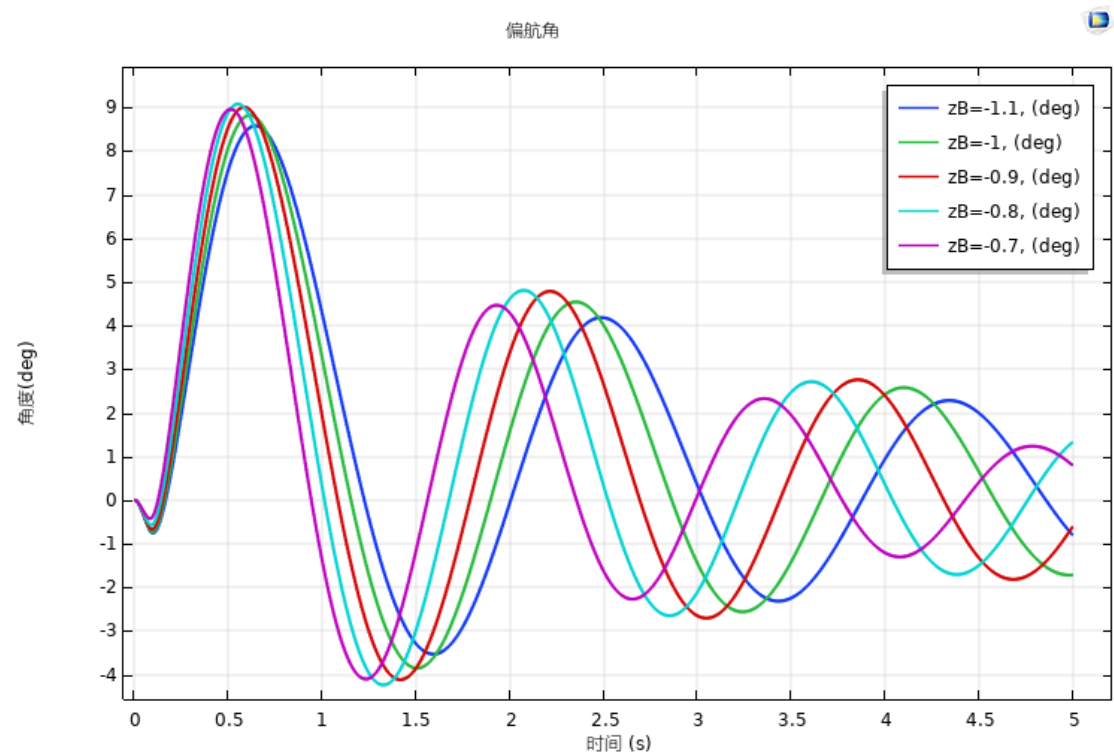
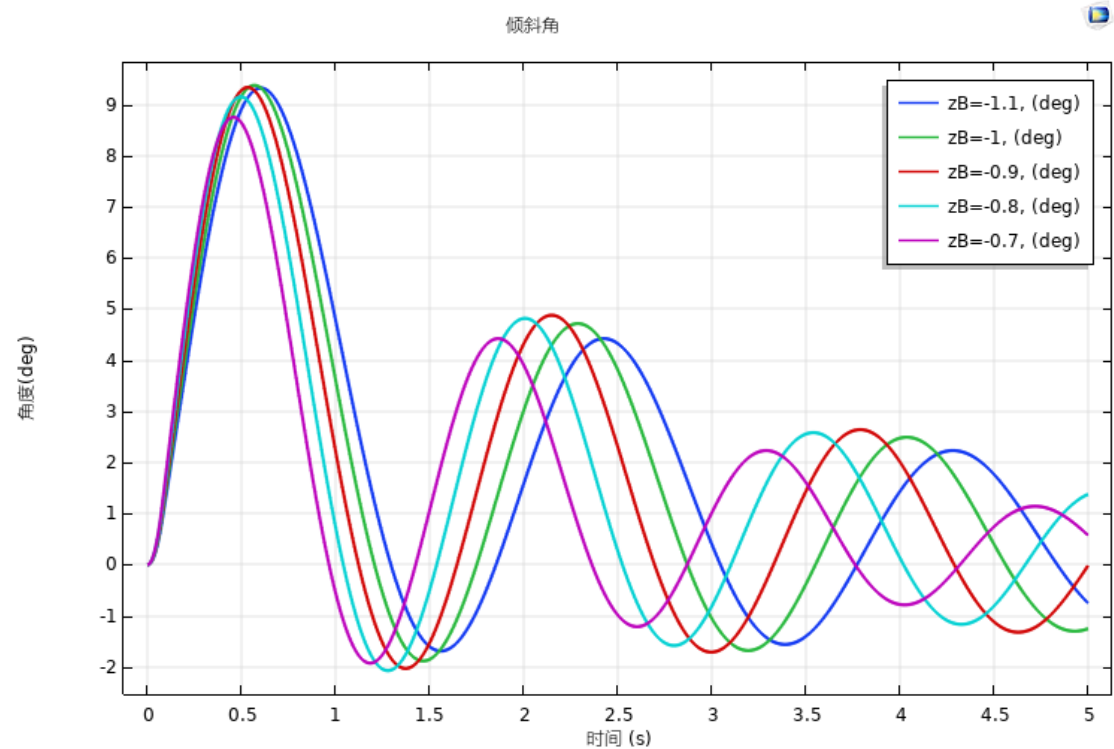


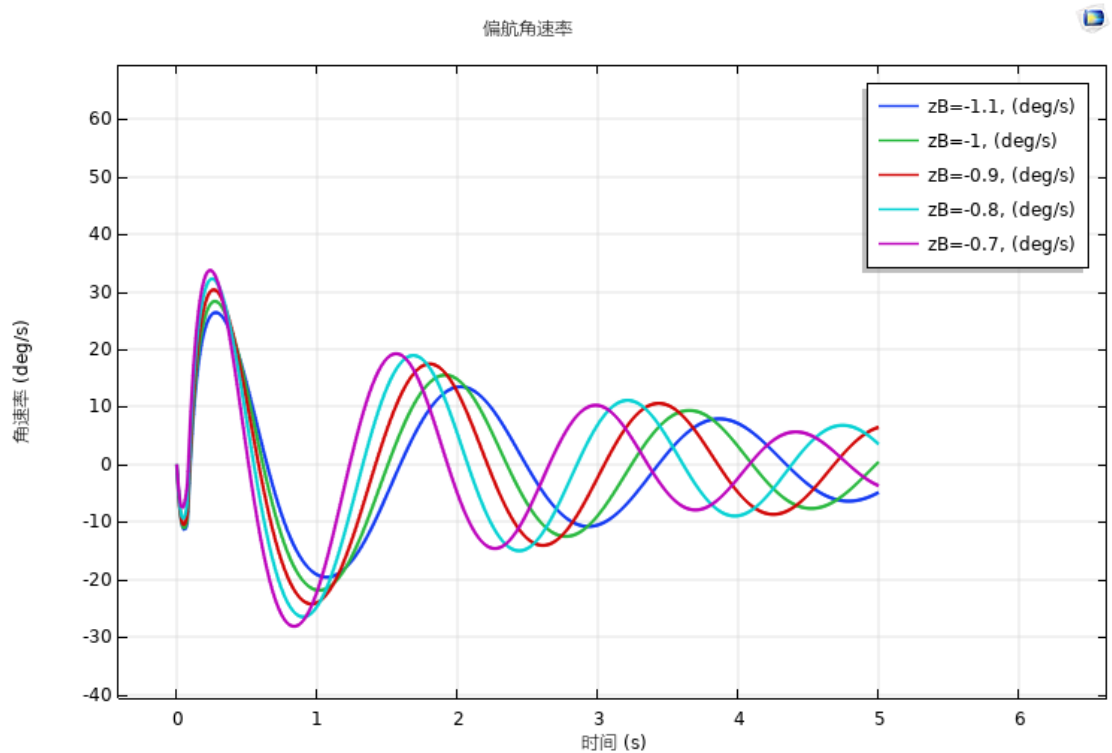
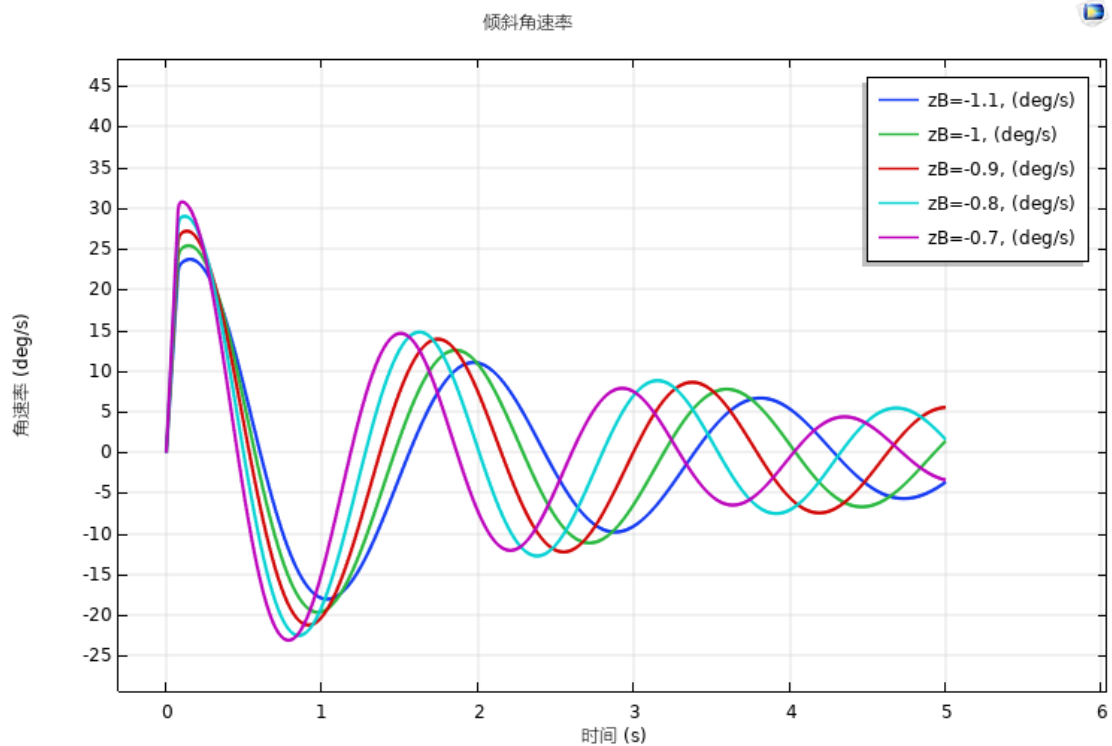




以上数据图显示，对于我们进行试验的 5 个模型，随着时间的增加，自行车都是逐渐趋于稳定的。

结合倾斜角-时间图可以看出，随着质心的 x 坐标变大，倾斜角的波峰值在变小，并且倾斜角变化频率变快，由倾斜趋向稳定的时间在逐渐缩短。我们对偏航角分析，可以得出类似结论。在这 5 组中，我们有理由认为， $x_B=0.6\text{m}$ （即质心位置靠前）对应模型是使自行车在受到扰动后重新恢复稳定的最理想的一个模型。





以上数据图显示，对于我们进行试验的 5 个模型，随着时间的增加，自行车都是逐渐趋于稳定的。

结合倾斜角-时间图可以看出，当质心高度逐渐下降时，倾斜角的波峰值先出现小幅上升，再小幅下降，但是由于变化程度较小，可以认为波峰值基本无变化；而倾斜角的变化频率在逐渐增加，自行车趋于稳定的时间可以认为在逐渐减短。对于偏航角做类似分析，我们可以得出相似的结论。在这 5 组中，我们有理由认

为, $z_B = -0.7\text{m}$ (即质心位置较低) 对应模型是使自行车在受到扰动后重新恢复稳定的最理想的一个模型。

当然, 以上的讨论是基于忽略地面与车轮的接触和人对自行车的操控的假设做出的分析。在实际生活中, 一方面, 后轮作为为自行车提供动力的轮, 需要获得地面较大的摩擦力, 这要求自行车的重心位置要适当的靠后; 另一方面, 考虑人体和整车的结构, 为了尽量便于人的操作, 车的重心不能太低。

5 任务分配、个人的贡献

聂文恺, 邱锦盛主要负责理论分析 (研究模型), 搜集资料。

李懿轩, 陈华辰主要负责虚拟样机模拟, 对实验数据进行分析。

6 参考文献

【1】 Timoshenko and Young, Advanced dynamics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1948

【2】 <http://blog.sciencenet.cn/blog-39472-770407.html>

【3】 <http://cn.comsol.com/blogs/simulating-the-motion-of-a-self-stable-bicycle/>
